



Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas (DCET)

O AVATAR DA RELATIVIDADE ESPECIAL

Jorge Henrique Sales

Itapetinga-BA
2015

Roteiro

1. Relatividade Especial: T. Galileu, T. Lorentz,
2. Avatar: Relatividade Segundo Minkowski, Espaço-Tempo, T. Lorentz,
3. Avatar: Dirac, 3 tipos de sistemas de coordenadas do Espaço-Tempo, Frente de Luz.

Relatividade Especial

Em 1862 James Clerk Maxwell publica um artigo unificando as forças elétricas e magnéticas em quatro fórmulas e dando origem ao eletromagnetismo. Como um dos resultados, surge a velocidade das ondas eletromagnéticas “c” dada por $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$.

Referencial Absoluto: Éter

Equações de Maxwell: Transformada de Galileu!

$$\begin{aligned}x' &= x - vt, \\y' &= y, \\z' &= z, \\t' &= t.\end{aligned}$$

Relatividade Especial

Parecia óbvio que as equações de Maxwell deveriam estar erradas, então a coisa a ser fazer era mudá-las de modo que, sob a transformação de Galileu, o princípio da relatividade fosse satisfeito. Quando isso foi tentado, os novos termos que tiveram de ser inseridos nas equações levaram a previsões de novos fenômenos elétricos que não existiam de forma alguma quando testados experimentalmente, então a tentativa foi abandonada [1]. Porém em 1904 Hendrick Antoon Lorentz observou que as equações de Maxwell permaneciam fascinantemente com a mesma forma quando aplicadas a elas outro tipo de transformação dada por:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Relatividade Especial

Como resultado essa transformação mostrava que não era o eletromagnetismo que deveria ser alterado, e sim a mecânica de Newton.

Em 1887, Albert Michelson e Edward Morley desenvolveram um experimento que levou os seus nomes. A intenção do experimento era medir a velocidade do Éter em relação à Terra usando uma fonte de luz e espelhos, partindo da velocidade da luz proposta pelas Equações de Maxwell e da relatividade Galileana, o experimento porém não apresentou resultados, e em todas medições se encontrou uma velocidade 0, a qual levaram ao abandono do conceito de Éter e ao choque com as Transformações de Lorentz 17 anos depois.

Em 1905, 18 anos após o experimento de Michelson-Morley, entra em cena Albert Einstein que publica a teoria da Relatividade Restrita, explicando os resultados obtidos por Michelson e Morley, e usando como base as transformações de Lorentz. No entanto a Relatividade Restrita teve grande impacto na ciência e na filosofia, a noção de tempo absoluto se perdia, a física de Newton se tornava apenas uma aproximação dos fenômenos naturais e novos conceitos nasciam alterando a visão de mundo e se focando em um único valor absoluto: a velocidade da luz.

Em 1915, 10 anos após a publicação da Relatividade Restrita, Albert Einstein reformula sua teoria e apresenta a Relatividade Geral, agora com a inserção de campos de gravitacionais e de espaços não curvos. Com isso a gravidade passa a ser vista como uma deformação no espaço-tempo, possuindo aspectos muito mais geométricos.

1 Avatar: ESPAÇO DE MINKOWSKI

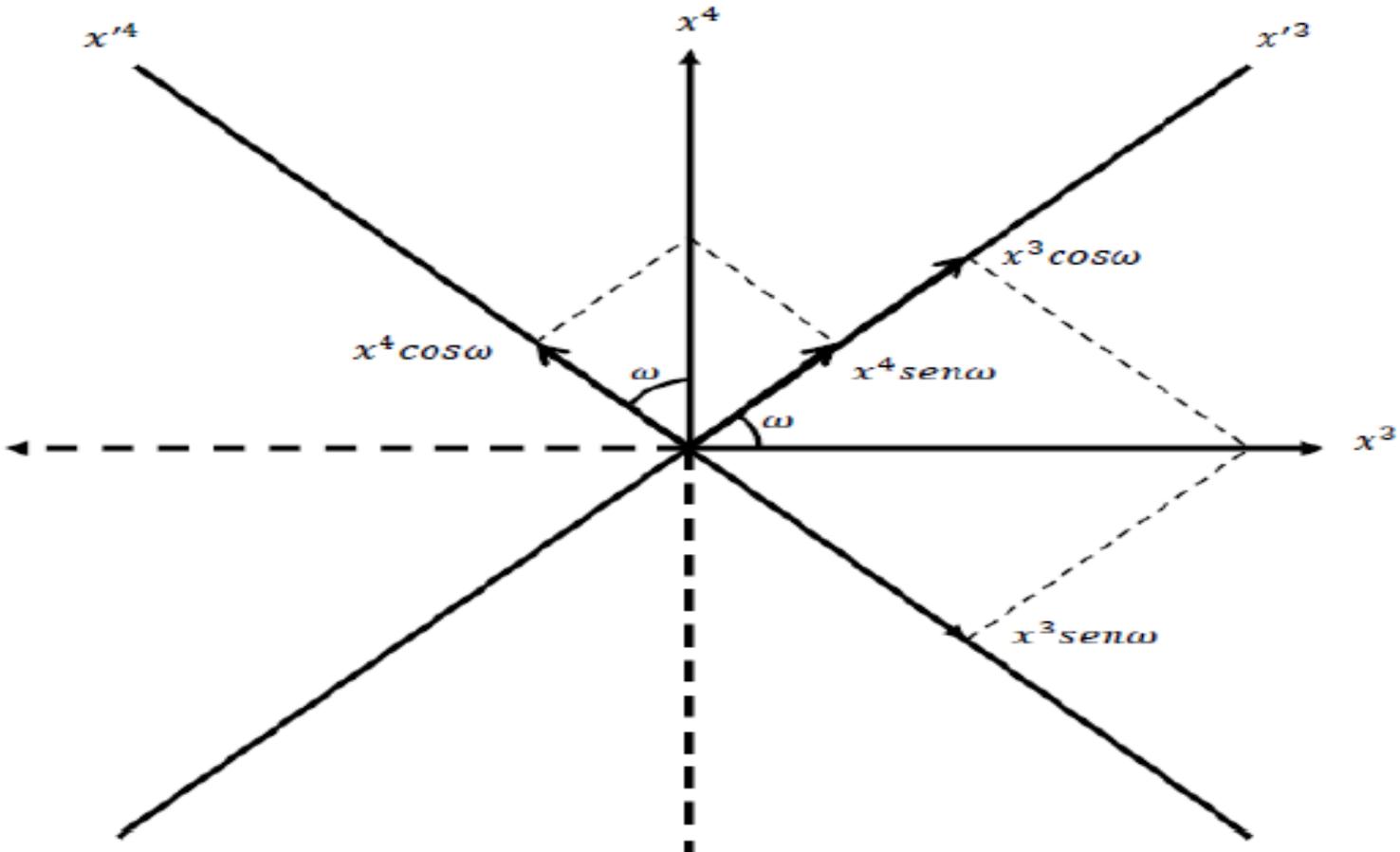
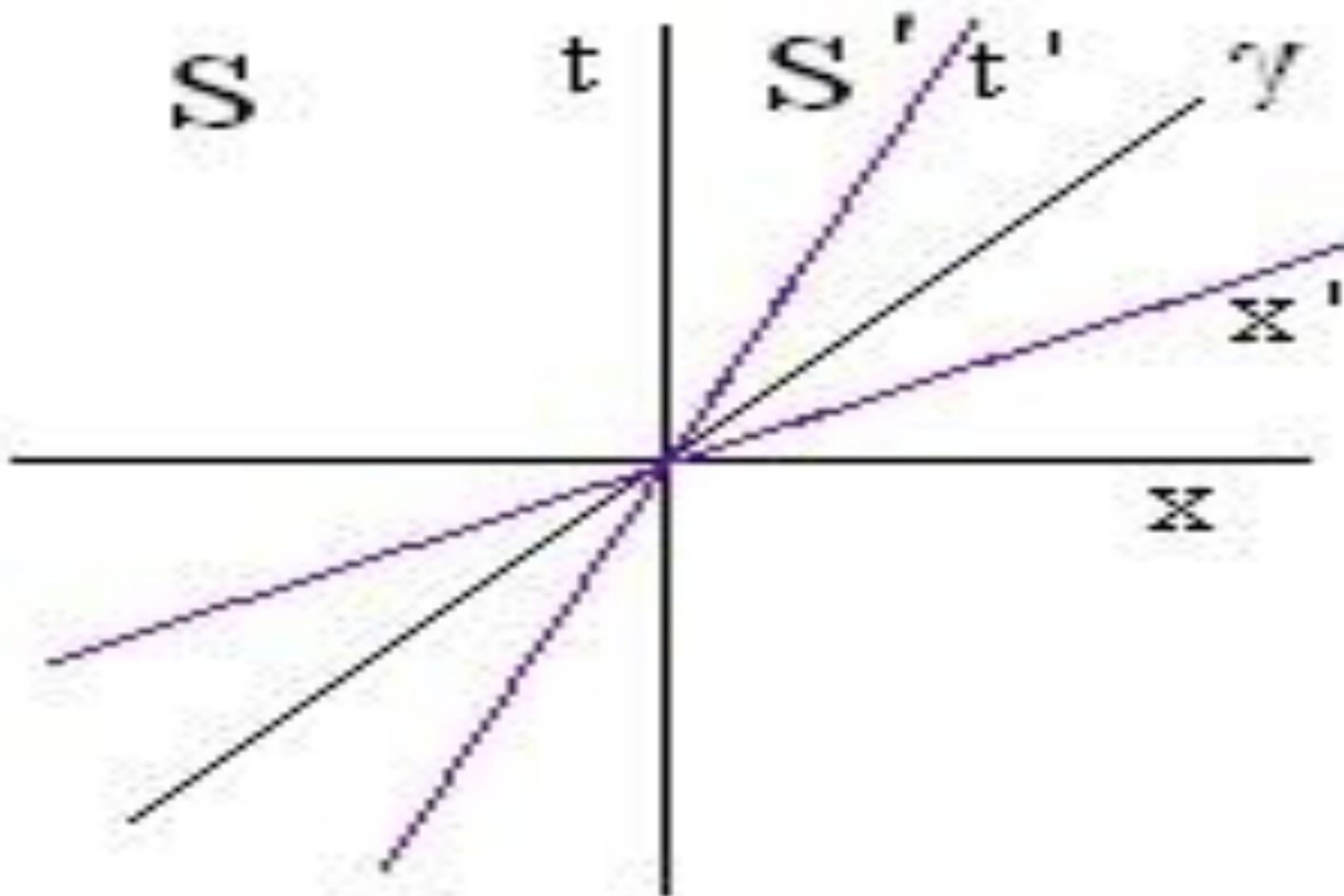


Figura 1: Rotação no espaço de Minkowski

ESPAÇO DE MINKOWSKI



T.L. NO ESPAÇO DE MINKOWSKI

projeção gráfica:

$$\begin{cases} x'^3 = x^3 \cos\omega + x^4 \operatorname{sen}\omega \\ x'^4 = -x^3 \operatorname{sen}\omega + x^4 \cos\omega \end{cases}$$

Funções hiperbólicas:

$$\omega = i\varphi \begin{cases} \cos\omega = \operatorname{cosh}\varphi \\ \operatorname{sen}\omega = i\operatorname{senh}\varphi \end{cases}$$

Notação de Bjorken-Drell:

$$\begin{cases} x'^3 = x^3 - ict = ix^0 i\varphi \\ x'^0 = -x^3 \operatorname{senh}\varphi + x^0 \operatorname{cosh}\varphi \end{cases}$$

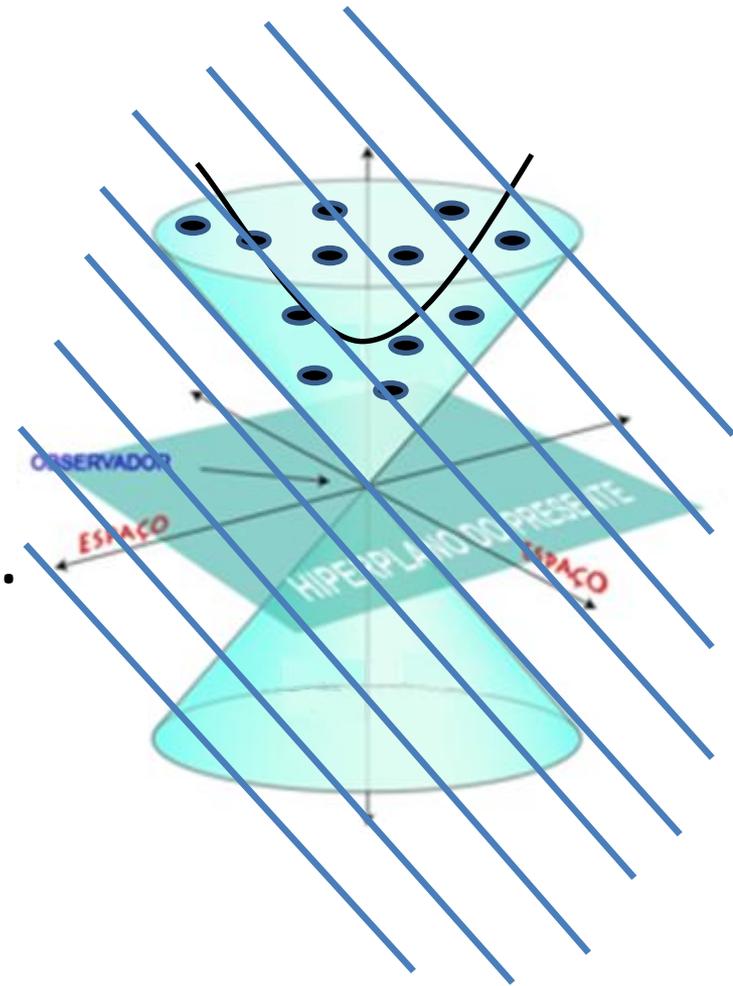
onde,

$$\gamma \begin{cases} x'^3 = \gamma(x^3 - \beta x^0) \\ x'^0 = \gamma(-\beta x^3 + x^0) \end{cases}$$

2 Avatar: Dirac

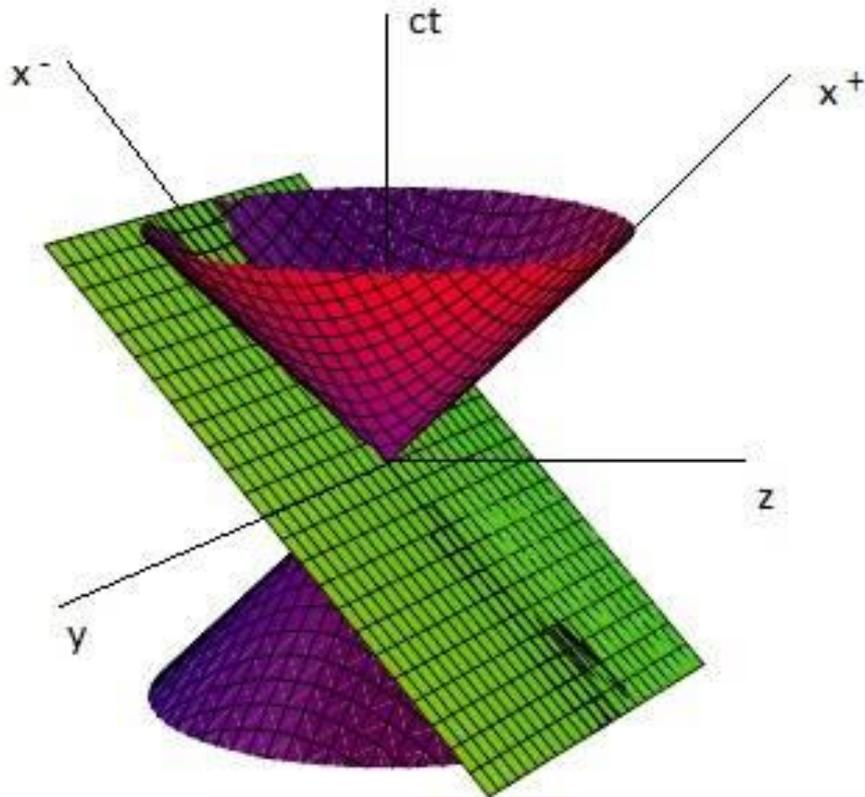
Em 1949 Dirac propôs três diferentes formas de dinâmicas para partículas relativísticas:

- ❖ Forma Instantânea;
- ❖ Forma Pontual;
- ❖ Forma Frontal: FRENTE DE LUZ.



Frente de Luz:

✓ Transformação de coordenadas na Frente de Luz:



$$x^+ = \frac{(x^0 + x^3)}{\alpha}$$

$$x^- = \frac{(x^0 - x^3)}{\alpha}$$

$$\vec{x}^\perp = x^1 \vec{i} + x^2 \vec{j}$$

$$x^0 = \frac{\alpha}{2} (x^+ + x^-) \quad \rightarrow \quad ct$$

$$x^3 = \frac{\alpha}{2} (x^+ - x^-) \quad \rightarrow \quad z$$

Convenção Lepage-Brodsky

Convenção Riegert-Soper

em que $\alpha = 1$, $\alpha = 2$ ou

$\alpha = \sqrt{2}$

T.L. NA FRENTE DE LUZ

Partindo do mesmo gráfico de Minkowski,

$$\begin{cases} z' = z \cosh\varphi - ct \sinh\varphi \\ ct' = ct \cosh\varphi - z \sinh\varphi \end{cases}$$

fazendo a T. de Coordenada para Frente de Luz,

$$\begin{cases} x'^+ = x^+ \cosh\varphi - x^- \sinh\varphi \\ x'^- = x^- \cosh\varphi + x^+ \sinh\varphi \end{cases}$$

com,

$$\begin{cases} \sinh\varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \\ \cosh\varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2} \end{cases}$$

logo,

$$\begin{cases} x'^+ = e^{-\varphi} x^+ \\ x'^- = e^\varphi x^- \end{cases}$$

onde,

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+v/c}{1-v/c} \right).$$

PROPRIEDADE DA T.L. NA FRENTE DE LUZ

Obtenção do ângulo φ :

$$\operatorname{tgh}\varphi = \frac{v}{c} \rightarrow \frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} = \frac{v}{c},$$

$$e^{\varphi} - e^{-\varphi} = \frac{v}{c}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}),$$

$$e^{\varphi} - \frac{v}{c}e^{\varphi} = e^{-\varphi} + \frac{v}{c}e^{-\varphi},$$

$$e^{2\varphi} = \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right),$$

Aplicando a propriedade de Logaritmo:

$$\varphi = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + v/c}{1 - v/c} \right).$$

SINGULARIDADES

Pelas equações de frente de luz, calculamos a direção x^+ :

$$\Delta x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Delta x^0 + \Delta x^3) ,$$

$$\Delta x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(c\Delta t + v\Delta t) ,$$

$$\Delta x^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta t(c + v) ,$$

Com isso:

$$\Delta t = \sqrt{2} \left(\frac{\Delta x^+}{c+v} \right) .$$

SINGULARIDADES

Pelas equações de frente de luz, calculamos a direção x^- :

$$\Delta x^- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Delta x^0 - \Delta x^3),$$

Com isso:

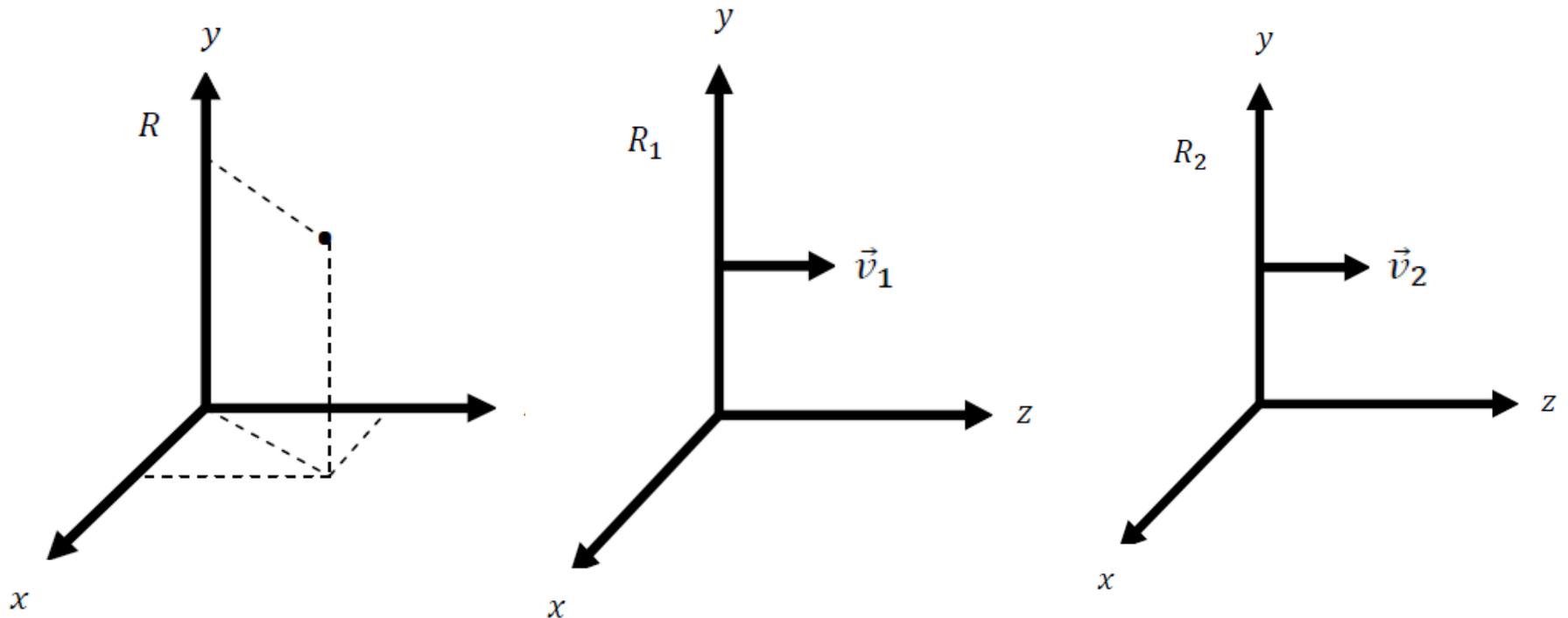
$$\Delta t = \sqrt{2} \left(\frac{\Delta x^-}{c-v} \right),$$

No limite $c = v$. A coordenada x^+ é a melhor escolha para representar o tempo na Frente de Luz,

$$\Delta t = \sqrt{2} \left(\frac{\Delta x^+}{c+v} \right).$$

TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE LORENTZ

Avaliando a física sob o cone de Luz visto de três referenciais,



TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE LORENTZ

Fazendo $R \rightarrow R_1$, pela transformada usual de Lorentz, vemos:

$$\begin{cases} t_1 = \gamma_1 \left(t_R - \frac{v_1}{c^2} z_R \right) \\ z_1 = \gamma_1 (z_R - v_1 t_R) \\ x_1 = x_R \\ y_1 = y_R \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$

TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE LORENTZ

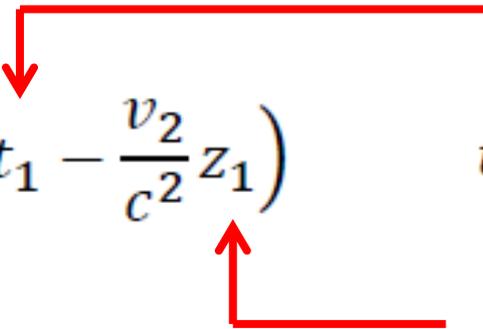
Fazendo agora $R_1 \rightarrow R_2$, de maneira análoga, vemos:

$$\begin{cases} t_2 = \gamma_2 \left(t_1 - \frac{v_2}{c^2} z_1 \right) \\ z_2 = \gamma_2 (z_1 - v_2 t_1) \\ x_2 = x_1 \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

onde, $\gamma_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}}}$

TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE LORENTZ

Agora com $R \rightarrow R_2$, obtemos:

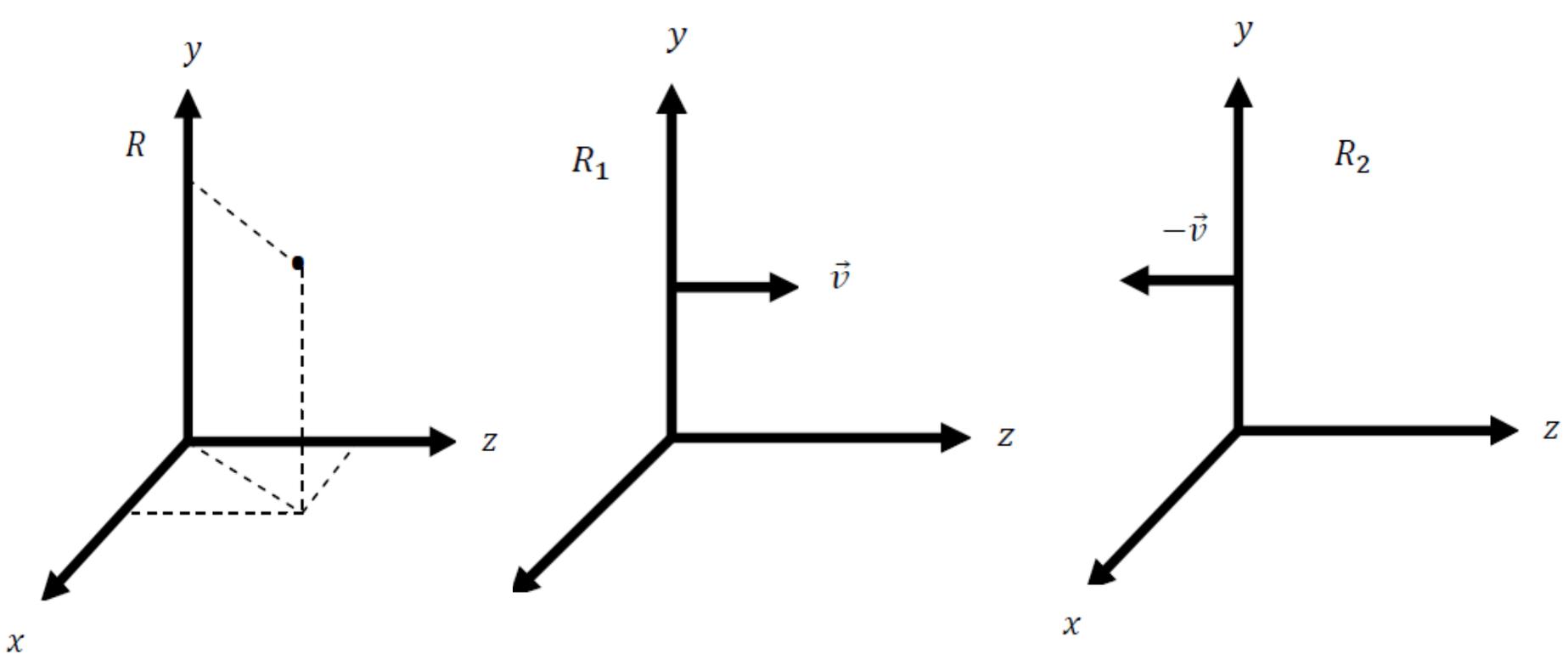

$$t_2 = \gamma_2 \left(t_1 - \frac{v_2}{c^2} z_1 \right) \quad t_1 = \gamma_1 \left(t_R - \frac{v_1}{c^2} z_R \right)$$
$$z_1 = \gamma_1 (z_R - v_1 t_R)$$

Obtendo o tempo relativístico satisfazendo a relatividade:

$$t_2 = \gamma_1 \gamma_2 \left\{ t_R \left[1 + \frac{v_2 v_1}{c^2} \right] - z_R \left[\frac{v_1 + v_2}{c^2} \right] \right\}$$

TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE LORENTZ

Observando agora um outro caso para três sistemas de referenciais



TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE LORENTZ

Para o caso em que R_2 se desloca no sentido inverso a R_1 , com velocidade $-\vec{v}$, encontramos um novo resultado para a expressão geral,

$$t_2 = \gamma_1 \gamma_2 \left\{ t_R \left[1 + \frac{v_2 v_1}{c^2} \right] - z_R \left[\frac{v_1 + v_2}{c^2} \right] \right\}$$

come~~ço~~, $-v_2$

$$z_R \left[\frac{v_1 + v_2}{c^2} \right] = 0$$

logo:

$$t_2 = \gamma_1 \gamma_2 \left\{ t_R \left[1 - \frac{v^2}{c^2} \right] \right\}$$

TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE L. NA FRENTE DE LUZ

Procedendo da mesma maneira encontramos os sistemas de transformação R_1 e R_2 expresso em termos de funções hiperbólicas. Relacionamos as equações do sistema R e R_1 com as equações do sistema R_1 e R_2 e obtemos a relação entre R e R_2

$$t_1 = t_R \cosh \varphi_1 - z_R \sinh \varphi_1$$

$$z_1 = z_R \cosh \varphi_1 - t_R \sinh \varphi_1$$

$$t_2 = t_1 \cosh \varphi_2 - z_1 \sinh \varphi_2$$

$$z_2 = z_1 \cosh \varphi_2 - t_1 \sinh \varphi_2$$

$$t_2 = t_R \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - z_R \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$z_2 = z_R \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - t_R \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Funções hiperbólicas:

$$\sinh(A + B) = \sinh A \cosh B + \cosh A \sinh B$$

$$\cosh(A + B) = \cosh A \cosh B + \sinh A \sinh B$$

TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE L. NA FRENTE DE LUZ

$$ct \leftarrow x^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} (x^+ + x^-) \quad t_2 = t_R \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - z_R \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$z \leftarrow x^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (x^+ - x^-) \quad z_2 = z_R \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - t_R \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

Coordenadas na frente de luz

Relação entre $R \rightarrow R_2$

$$(x^+ + x^-)_2 = (x^+ + x^-)_R \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - (x^+ - x^-)_R \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$(x^+ - x^-)_2 = (x^+ - x^-)_R \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - (x^+ + x^-)_R \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

somando, encontramos:

$$x_2^+ = x_R^+ \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - x_R^+ \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

subtraindo, temos:

$$x_2^- = x_R^- \cosh(\varphi_1 + \varphi_2) + x_R^- \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)$$

TRANSFORMAÇÕES SUCESSIVAS DE L. NA FRENTE DE LUZ

Fazendo:

$$x_2^+ = x_R^+ [\cosh(\varphi_1 + \varphi_2) - \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

e

$$x_2^- = x_R^- [\cosh(\varphi_1 + \varphi_2) + \sinh(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

com

$$\sinh\varphi = \frac{e^\varphi - e^{-\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh\varphi = \frac{e^\varphi + e^{-\varphi}}{2}$$

logo,

$$x_2^+ = e^{-(\varphi_1 + \varphi_2)} x_R^+$$

$$x_2^- = e^{(\varphi_1 + \varphi_2)} x_R^-$$

onde φ_i , com $i = 1, 2$. Por indução, obtemos a transformada de Lorentz para n referenciais na frente de luz:

$$x_n^+ = e^{-(\sum_{i=1}^n \varphi_i)} x_R^+$$

$$x_n^- = e^{(\sum_{i=1}^n \varphi_i)} x_R^-$$

EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Tendo a equação de Schroedinger:

$$H\Psi = E\Psi$$

onde:

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

descrevendo agora a evolução quântica de uma partícula livre:

$$\sqrt{-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

obtemos:

$$\left[\square + \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \Psi = 0$$

EQUAÇÃO DE KLEIN-GORDON

Problemas avistados em 1926:

i) A equação de Klein-Gordon descrevia partícula de spin zero.

$$\pi^0 \longrightarrow 1947$$

ii) Assumia soluções de energia negativa, partindo do Hamiltoniano,

$$H = -\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$$

fazendo com que a equação chegasse igualmente a equação de Klein-Gordon.

MOMENTO CANÔNICO NA FRENTE DE LUZ

sendo os momentos canonicamente conjugados das coordenadas (x^+, x^-, x^\perp) dados por:

$$k^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(k^0 + k^3) \quad k^- = \frac{1}{\sqrt{2}}(k^0 - k^3) \quad \vec{k}^\perp = (k^1, k^2).$$

a transformada inversa fica dada por:

$$k^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(k^+ + k^-) , \quad k^3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(k^+ - k^-) .$$

ENERGIA RELATIVÍSTICA NA FRENTE DE LUZ

O método usual de encontrar a relação da energia nas coordenadas do cone de luz é calcular o produto escalar entre os momentos, como,

$$k^\mu k_\mu = k_0^2 - \vec{k}^2 \rightarrow k^\mu k_\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{k}^2 \rightarrow k^\mu k_\mu = \boxed{\frac{E^2}{c^2}} - \boxed{k_x^2 - k_y^2} - \boxed{k_z^2}$$

Aplicando a transformada inversa dos momentos na frente de luz:

$$\frac{E}{c} = \boxed{k^0}, \quad \boxed{c^2 m_0^2} = \boxed{2k^+ k^-} - \boxed{\vec{k}_\perp^2} \quad z = \boxed{k^3}.$$

logo,

$$k^- = \frac{c^2 m_0^2 + \vec{k}_\perp^2}{2k^+}$$

ENERGIA RELATIVÍSTICA NA FRENTE DE LUZ

Com isso, encontramos a relação de dispersão de energia-momento :

$$k^- = \frac{c^2 m_0^2 + \vec{k}_\perp^2}{2k^+}$$

Notando-se assim, a não dependência de um termo quadrático, como no espaço-tempo de Minkowski:

$$k^0 = E = \pm c \sqrt{m_0^2 + \vec{k}^2}$$

FINAL

T.L. no espaço de Minkowski é equivalente a Relatividade Especial.

A T.L. aplicada a frente de luz entre dois referenciais satisfaz a Relatividade Especial:

Obtemos o tempo relativístico no espaço de Minkowski, para 3 referenciais, num caso geral.

Obtemos a Energia para uma partícula relativística na Frente de Luz.

PERSPECTIVAS

- ❖ Qual a consequência do resultado para 3 referenciais na dinâmica da frente de luz.
- ❖ A gravitação via frente de luz.

AGRADECIMENTOS

- A Universidade Estadual de Santa Cruz
- A FAPESB e CNPq.
- UESB

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ❖ A.T. Suzuki, J.H.O.Sales, L.A. Soriano, Phys.Rev. **D88** (2013) 025036-1.
- ❖ J.H.O. Sales and A.T. Suzuki, Communications in Theoretical Physics, **60**, (2013) 55.
- ❖ A.T. Suzuki, J.H.O. Sales, L.A. Soriano and J.D. Bolzan, Few Body Syst. **52** (2012) 443-448.
- ❖ J.H.O. Sales and A.T.Suzuki, Commun. Theor. Phys. **55**, (2011) 1029.
- ❖ J. H.O. Sales, T. Frederico, B.V. Carlson and P.U. Sauer, Phys. Rev. C 61 (2000) 044003.
- ❖ J.H.O. Sales · A.T. Suzuki, Int J Theor Phys **48**, (2009) 2340-2352.
- ❖ J.H.O. Sales and A.T. Suzuki, Nucl. Phys. Proc. Suppl.**199**, (2010) 211.
- ❖ J.H.O. Sales, T. Frederico, B.V. Carlson, P.U. Sauer, Phys.Rev. **C63** (2001) 064003.
- ❖ J.P.B.C. de Melo, J.H.O. Sales, T. Frederico, P.U. Sauer, Nucl. Phys. **A 631**,(1998) 574c.
- ❖ P.A.M. Dirac, Rev. Mod.Phys. 21 (1949) 392.
- ❖ T. Frederico, J.H.O. Sales, B.V. Carlson and P.U. Sauer, Nucl.Phys. **A737** (2004) 260-264.