

Defeitos Topológicos e Aplicação em 2+1 Dimensões

Dameres S. S. Borges

Departamento de Física,
Universidade Federal de Campina Grande - UFCG

24 de abril de 2018

- Introdução
- Teoria para um Campo Escalar Real Unidimensional
- Teoria para Configurações Planares
- Skyrmions
- Referências

Defeitos Topológicos

Soluções de equações de movimento não-lineares, estáveis, que conectam mínimos ou vácuos de um potencial.

- Kinks (1,1) dimensões
- Vórtices em (2,1) dimensões
- Monopolos (3,1) dimensões
- Skyrmions (2,1) e (3,1) dimensões

Teoria para um Campo Escalar Real

A teoria para um campo escalar real $\phi = \phi(x, t)$ pode ser descrita pela seguinte densidade de lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi). \quad (1)$$

A ação para o campo é dada por

$$S[\phi] = \int dt dx \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2)$$

A equação de movimento pode ser escrita como

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_\phi = 0. \quad (3)$$

Podemos efetuar uma transformada de Legendre, na forma

$$\rho = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \mathcal{L}, \quad (4)$$

a partir da qual podemos finalmente escrever a energia como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \rho = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\dot{\phi}^2}{2} + \frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right]. \quad (5)$$

Kinks são casos especiais de soluções não-dissipativas, para as quais a densidade de energia em um dado ponto não desaparece quando tomamos limites de tempo muito grandes.

Vamos focar aqui em soluções estáticas, $\phi = \phi(x)$. Assim a equação de movimento (3) se torna

$$\phi'' = V_\phi. \quad (6)$$

Método BPS (Bogomol'nyi - 1976, Prasad e Somerfield - 1975)

Para o caso estático, podemos reescrever (5) como

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{\phi'^2}{2} + V(\phi) \right]. \quad (7)$$

Podemos definir o potencial $V(\phi)$ como sendo

$$V(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2. \quad (8)$$

O segundo passo da aplicação do método consiste em manipular o integrando de forma que ele possa ser reescrito como um quadrado perfeito, ou seja

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} (\phi' \mp W_\phi)^2 \pm W_\phi \phi' \right]. \quad (9)$$

Daí então, podemos reconhecer uma energia mínima e não-trivial do sistema, que ocorre ao considerarmos

$$\phi' = \pm W_\phi. \quad (10)$$

Esta é uma equação de primeira ordem e sua solução também satisfaz (6). A essa energia minimizada chamamos E_{BPS} , e ela tem a forma

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [\pm W_\phi \phi']. \quad (11)$$

$$E_{BPS} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx [W_\phi \phi'] = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{dW}{dx} = W(\phi(\infty)) - W(\phi(-\infty)), \quad (12)$$

Assim

$$|E_{BPS}| = |\Delta W|. \quad (13)$$

Utilizando essa nova definição, podemos reescrever (6) e (10) como

$$\phi'' = W_\phi W_{\phi\phi}, \quad (14)$$

e

$$\phi' = \pm W_\phi. \quad (15)$$

Uma das maneiras de escrevermos essa corrente é considerando

$$J^\mu = \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu W(\phi), \quad (16)$$

como a introduzida por BAZEIA et al, onde $\mu, \nu = 0, 1$ e $\epsilon^{\mu\nu}$ é o tensor de Levi-Civita - antissimétrico e em duas dimensões ($\epsilon^{01} = 1 = -\epsilon^{10}$; $\epsilon^{00} = 0 = \epsilon^{11}$). Por causa da antissimetria de $\epsilon^{\mu\nu}$, fica claro que J^μ é uma quantidade conservada, ou seja

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (17)$$

Assim, para soluções estáticas, a carga topológica é dada por

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} dx J^0, \quad (18)$$

que também é uma quantidade conservada.

Note que $J^0 = \frac{dW}{dx}$, então

$$Q = \Delta W = E_{BPS}, \quad (19)$$

ou seja, essa definição de corrente nos permite ter uma carga conservada idêntica à energia BPS.

Solução Tipo Kink

Tomemos o potencial ϕ^4 , plotado na figura abaixo, que em unidades adimensionais é dado por

$$V(\phi) = \frac{1}{2}(1 - \phi^2)^2. \quad (20)$$

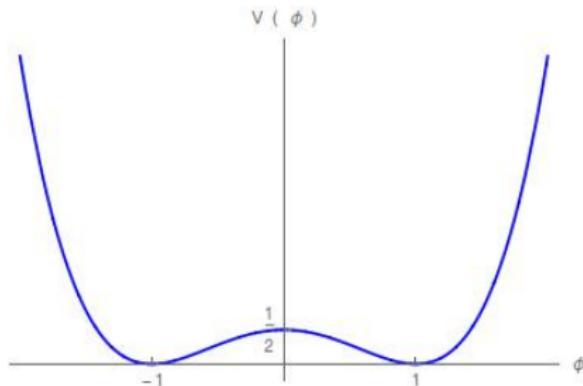


Figura: Potencial ϕ^4

A partir do potencial acima, podemos utilizar (8) para obtermos a forma do superpotencial, que é

$$W(\phi) = \phi - \frac{\phi^3}{3}. \quad (21)$$

A equação de movimento para esse sistema, que é

$$\phi'' = 2\phi(\phi^2 - 1), \quad (22)$$

e a equação de primeira ordem pode ser escrita na forma

$$\phi' = \pm(1 - \phi^2). \quad (23)$$

As soluções não-triviais, que são dadas por

$$\phi_{\pm}(x) = \pm \tanh(x). \quad (24)$$

Essas soluções são denominadas *kinks* (com sinal positivo) e *anti-kinks* (com sinal negativo), respectivamente.

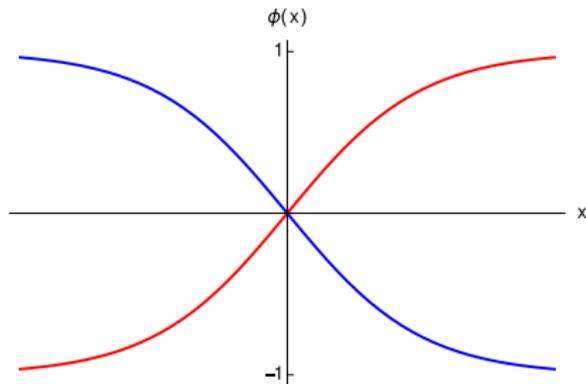


Figura: Soluções. (*kink* - linha vermelha; *anti-kink* - linha azul)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot \nabla\phi - U(\phi), \quad (25)$$

com $U = U(\phi)$, na forma

$$U(\phi) = \frac{1}{2r^2}P(\phi). \quad (26)$$

No caso de uma configuração esfericamente simétrica e independente do tempo, $\phi = \phi(r)$ obedece a equação de movimento

$$r^2 \frac{d^2\phi}{dr^2} + r \frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{2} \frac{dP(\phi)}{d\phi} = 0. \quad (27)$$

Com energia

$$E = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} r dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} P(\phi) \right]. \quad (28)$$

Para encontrarmos soluções BPS, escolhemos uma função $W = W(\phi)$, tal que

$$P(\phi) = \frac{1}{2} W_\phi^2. \quad (29)$$

Então a energia pode ser escrita como

$$E = \frac{1}{2} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} r dr \left[\left(\frac{d\phi}{dr} \mp \frac{1}{r} W_\phi \right)^2 \pm \frac{2}{r} W_\phi \right]. \quad (30)$$

Assim, a equação que minimiza a energia é

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r} W_\phi \quad (31)$$

e

$$|E_{BPS}| = 2\pi |\Delta W|. \quad (32)$$

Estabilidade Linear a partir do Comportamento da Energia Total

Vamos considerar uma solução do tipo

$$\phi(r) = \phi_s(r) + \epsilon\eta(r), \quad (33)$$

sendo $\phi_s(r)$ a solução estática conhecida, ϵ uma constante real de valor muito pequeno e $\eta(r)$ a flutuação em torno da solução estática, que obedece à seguinte condição de contorno

$$\eta(0) = \eta(\infty) = 0. \quad (34)$$

Substituindo (33) na energia total, temos

$$E_\epsilon = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi_s}{dr} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{d\eta}{dr} \right)^2 \epsilon^2 + \epsilon \frac{d\phi_s}{dr} \frac{d\eta}{dr} + \frac{1}{r^2} P(\phi_s + \epsilon\eta) \right] \quad (35)$$

Observe que $P(\phi_s + \epsilon\eta)$ pode ser expandido em torno de $\phi = \phi_s$ na forma

$$P(\phi_s + \epsilon\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} \frac{d^n P(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta^n, \quad (36)$$

ou seja, abrindo a expansão até segunda ordem temos que

$$P(\phi_s + \epsilon\eta) = P(\phi)_{\phi=\phi_s} + \epsilon \frac{dP(\phi)}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta + \frac{\epsilon^2}{2} \frac{d^2 P(\phi)}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \quad (37)$$

Teremos uma equação do tipo

$$E_\epsilon = E_0 + \epsilon E_1 + \epsilon^2 E_2 + \dots, \quad (38)$$

sendo E_n , com $n = 1, 2, 3, \dots$ a contribuição para a energia até a ordem n em ϵ .

$$E_1 = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[\frac{d\phi}{dr} \Big|_{\phi=\phi_s} \frac{d\eta}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta \right] \quad (39)$$

e

$$E_2 = \pi \int_0^\infty r dr \left[\left(\frac{d\eta}{dr} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 P}{d\phi^2} \Big|_{\phi=\phi_s} \eta^2 \right], \quad (40)$$

respectivamente.

Mas E_1 , pode ser reescrito como

$$E_1 = 2\pi \int_0^\infty r dr \left[-\frac{1}{r} \frac{d\phi}{dr} \Big|_{\phi=\phi_s} - \frac{d^2\phi}{dr^2} \Big|_{\phi=\phi_s} + \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi_s} \right] \eta +$$
$$+ 2\pi \int_0^\infty d \left(r \frac{d\phi}{dr} \eta \right), \quad (41)$$

ou seja,

$$E_1 = 0. \quad (42)$$

Observe que E_2 pode ser reescrito como

$$E_2 = \pi \int_0^\infty r dr \left(\eta' - \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta \right)^2 + \pi \int_0^\infty d \left(\frac{1}{r} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta^2 \right). \quad (43)$$

A condição de mínimo para a energia acima é dada quando

$$\eta' = \frac{1}{r^2} \frac{dP}{d\phi} \frac{1}{\phi'} \eta, \quad (44)$$

assim, resolvendo essa equação diferencial para η , obtemos que

$$\eta(r) = A e^{\int dr \frac{r^{-2}}{\phi'} \frac{dP}{d\phi}}, \quad (45)$$

com A sendo uma constante de normalização.

Teve seu conceito matemático proposto por Tony Skyrme nos anos 60, ao estudar uma determinada teoria de campo não-linear para partículas nucleares.

- Mostrou que configurações de campo estáveis podem ocorrer como soluções dessa teoria.
- Tais partículas podem ser descritas como estados localizados, chamados Skyrmions.

- São configurações da magnetização em nanoescala topologicamente estáveis.
- A topologia de um skyrmion isolado em um material magnético pode ser visualizada ao projetar uma esfera de spins em um plano infinito.

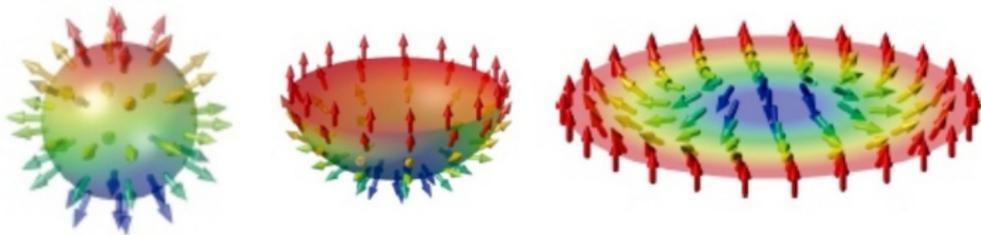


Figura: Referência: Tese Edinaldo I. B. Rodrigues.

Em 2D (para Skymions restritos ao plano x-y) temos:

$$Q = \frac{1}{4\pi} \iint \vec{M} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{M}}{\partial y} \right) dx dy. \quad (46)$$

Vamos considerar que o material magnético é homogêneo ao longo da direção \hat{z} .

Módulo constante $\vec{M} \cdot \vec{M} = 1$.

$\vec{M} = \vec{M}(r)$, tal que $\vec{M} \cdot \hat{r} = 0$.

Vamos usar coordenadas cilíndricas para modelar a seguinte situação

$$\vec{M}(r) = \hat{z} \sin\left(\frac{\pi}{2}\phi(r) + \delta\right) + \hat{\theta} \cos\left(\frac{\pi}{2}\phi(r) + \delta\right), \quad (47)$$

ϕ é um campo escalar, que pode variar no plano (r, θ) e δ é uma constante, que pode ser usada para descrever adequadamente o estado fundamental do sistema.

$$Q = \frac{1}{2} \sin \left[\frac{\pi}{2} \phi(0) + \delta \right] - \frac{1}{2} \sin \left[\frac{\pi}{2} \phi(\infty) + \delta \right]$$

Seja o potencial ϕ^4

$$U(r, \phi) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2(1-s)^2} (1 - \phi^2)^2 \quad (48)$$

onde s é um parâmetro real, $s \in [0, 1)$.

$$W(\phi) = \frac{\phi}{(1-s)} - \frac{\phi^3}{3(1-s)}. \quad (49)$$

Skyrmions (2,1)D - ϕ^4

Com equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r} \frac{(1 - \phi^2)}{1 - s}, \quad (50)$$

que pode ser resolvida analiticamente por

$$\phi = \pm \frac{r^{2/(1-s)} - 1}{r^{2/(1-s)} + 1}. \quad (51)$$

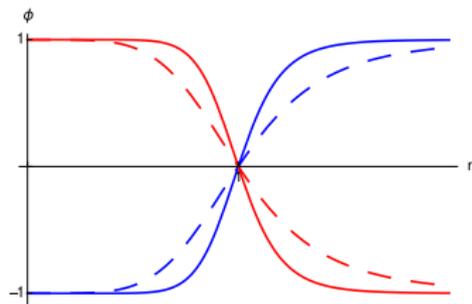


Figura: Solução positiva: azul. Solução negativa: vermelha. $s=0.6$ tracejado. $s=0.8$ linha contínua.

A densidade de energia é

$$\rho(r) = \frac{16r^{2(1+s)/(1-s)}}{(1-s)^2(1+r^{2/(1-s)})^4} \quad (52)$$

$$E = 2\pi \int_0^\infty r dr \rho(r) = \frac{8\pi}{3(1-s)}. \quad (53)$$

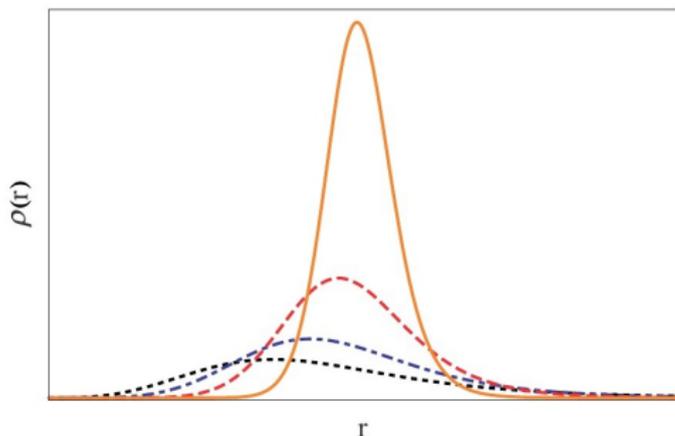


Figura: $s=0.2$ (pontilhado preto), $s=0.4$ (traço-ponto azul), $s=0.6$ (tracejado vermelho) e $s=0.8$ (linha laranja). Referência: Tese Edinaldo I. B. Rodrigues.

Verificamos que $E_2 = 0$ e $E_3 = 0$ e E_4 tem a forma

$$E_4 = \frac{3\pi}{35(1-s)}, \quad (54)$$

para

$$\eta(r) = \left(\frac{3}{2-s}\right)^{1/2} \frac{2r^{2/(1-s)}}{(1-s)(r^{2/(1-s)} + 1)^2}. \quad (55)$$

Como $E_4 > 0$, as soluções obtidas são estáveis sob pequenas flutuações simétricas.

Skyrmions (2,1)D - ϕ^4

- As soluções acima possuem carga $Q = \pm 1$.
- Escolhendo $\delta = 0$ (Constante de fase que controla a magnetização no centro da estrutura e assintoticamente).
- (SOLUÇÃO NEGATIVA) $\vec{M}(r)$ em $r = 0$ aponta para cima, na direção z .
- (SOLUÇÃO NEGATIVA) $\vec{M}(r)$ em $r \rightarrow \infty$ aponta para baixo, na direção z .

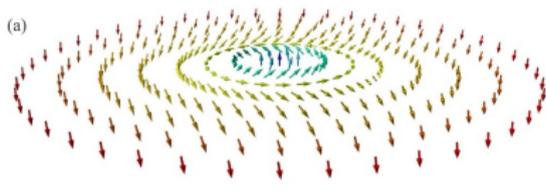


Figura: Excitação Magnética helicoidal para $s = 0.2$. (solução negativa)
Referência: Tese Edinardo I. B. Rodrigues

Seja o potencial

$$U(\phi) = \frac{1}{2r^2} \frac{1}{(1-s)^2} \phi^2 (1 - \phi^2)^2 \quad (56)$$

onde s é um parâmetro real, $s \in [0, 1)$.

$$W(\phi) = \frac{1}{1-s} \left(\frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^4}{4} \right) \quad (57)$$

Skyrmions (2,1)D - ϕ^6

Com equações de primeira ordem

$$\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{1}{r} \frac{(1 - \phi^2)\phi}{1 - s} \quad (58)$$

com solução

$$\phi = \pm \frac{r^{\frac{1}{1-s}}}{\sqrt{r^{\frac{2}{1-s}} + 1}}. \quad (59)$$

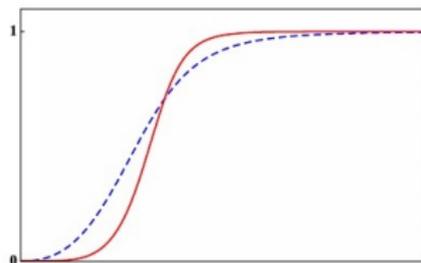


Figura: $s = 0.6$ e $s = 0.8$, com tracejado azul e linha sólida vermelha, respectivamente. (solução positiva) Referência: Bazeia, Ramos e Rodrigues (2016)

- As soluções acima possuem carga $Q = \pm 1/2$.
- Escolhendo $\delta = \pi/2$.
- (SOLUÇÃO NEGATIVA) $\vec{M}(r)$ em $r = 0$ aponta para cima, na direção z.
- (SOLUÇÃO NEGATIVA) $\vec{M}(r)$ em $r \rightarrow \infty$ aponta para θ .

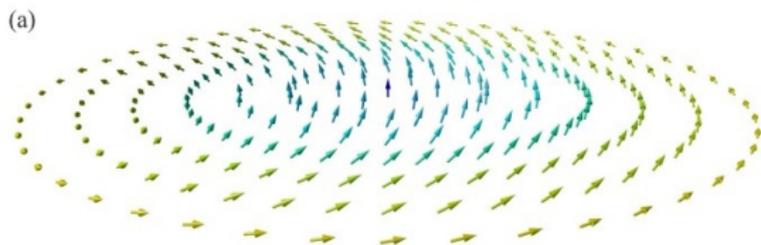


Figura: Excitação Magnética helicoidal para $s = 0.2$. (solução negativa) Referência: Tese Edinaldo I. B. Rodrigues

A densidade de energia é

$$\rho = \frac{r^{2s/(1-s)}}{(1-s)^2(1+r^{2/(1-s)})^3}, \quad (60)$$

com energia total igual a

$$E = \frac{\pi}{2(1-s)}. \quad (61)$$

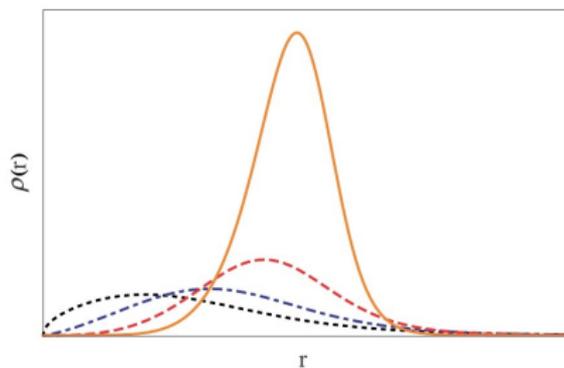


Figura: $s=0.2$ (pontilhado preto), $s=0.4$ (traço-ponto azul), $s=0.6$ (tracejado vermelho) e $s=0.8$ (linha laranja). Referência: Tese Edinardo I. B. Rodrigues.

Verifica-se que $E_2 = 0$ e E_3 é

$$\frac{15\pi^2}{64(1-s)}, \quad (62)$$

para

$$\eta(r) = \frac{4r^{2/(1-s)}}{(1-s)\sqrt{\pi(1+s)}(1+r^{2/(1-s)})^{3/2}}. \quad (63)$$

Ou seja, as soluções são estáveis sob pequenas flutuações.

-  VACHASPATI, T. **Kinks and Domain Walls: An Introduction to Classical and Quantum Solitons.** New York: Cambridge University Press, 2006.
-  N. Nagaosa and Y. Tokura. **Topological properties and dynamics of magnetic skyrmions**, Nature Nanotech. 8, 899 (2013).
-  D. Bazeia, E.I.B. Rodrigues and J.G.G.S. Ramos: **Topological strength of magnetic skyrmions.** Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Volume 423, Pages 411-420 (2017).
-  D. Bazeia, and E.I.B. Rodrigues: **Semi-Compact Skyrmion-like Structures.** Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Volume 432, Pages 112-118 (2017).

OBRIGADA!!!