# MECÂNICA QUÂNTICA SIMPLÉTICA

Rendisley Aristoteles

Universidade de Brasília, Instituto de Física,
International Center of Physics - UnB

03 de outubro de 2021

# Resumo da Apresentação

# Biografia

- Nasceu em Budapeste - 1902 e faleceu em Princeton -1995.
- Prêmio Nobel em Física - 1963 - Contribuições para a teoria do núcleo atômico e partículas elementares, particularmente pelas descobertas decorrentes da aplicação de princípios de simetrias fundamentais.
- E. P. Wigner, Phys. Rev. 40, 749 (1932).

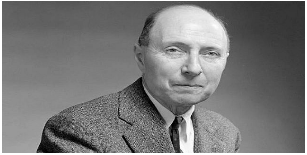


Figura: Wigner.

# 1. Introdução e motivação

- Função de Wigner → Mecânica quântica no espaço de fase superfluidez.

**Interesse prático:** variedade natural para se escrever teorias cinéticas. Atualmente, o formalismo proposto por Wigner é aplicado em diversas áreas, dentre as quais: física nuclear, física de partículas, mecânica estatística, tomografia quântica, física de plasma.

**Interesse teórico:** O formalismo de Wigner introduz a geometria não-comutativa (Amorim, 2007), (Szabo, 2000).

- Produto-estrela ou produto de Weyl.

- O método da função de Wigner abre espaço para a formulação de teorias de representação no espaço de fase.

- Representações de Grupos de Simetria (Mecânica Quântica Simplética).

**2.1 - Definição da Função de Wigner**

- Matriz densidade

$$\rho = \sum_i \omega_i |\psi_i(t)\rangle\langle\psi_i(t)|, \tag{1}$$

$$\langle A\rangle = Tr(\rho A). \tag{2}$$

- Equação de Liouville-von Neumann

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)]. \tag{3}$$

- A função de Wigner é definida como uma transformada de Fourier dos elementos da matriz densidade,

$$f_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dz \exp(\frac{ipz}{\hbar}) \langle q - \frac{z}{2} | \rho | q + \frac{z}{2} \rangle,$$

ou

$$f_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3} \int dk \exp(\frac{-iqk}{\hbar}) \langle p - \frac{k}{2} | \rho | p + \frac{k}{2} \rangle. \tag{4}$$

## 2.2 - Propriedades da Função de Wigner

$$f_w(q,p) \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$|\psi(q)|^2 = \int f_w(q,p)dp = \langle q|\rho|q\rangle \tag{6}$$

$$|\widetilde{\psi}(p)|^2 = \int f_w(q,p)dq = \langle p|\rho|p\rangle \tag{7}$$

$$\int f_w(q,p)dqdp = Tr\rho = 1. \tag{8}$$

$$-\frac{2}{h} \leq f_w(q,p) \leq \frac{2}{h} \tag{9}$$

**2.3 - Parâmetro de negatividade**

$$\eta(\psi) = \int |f_W(q,p)| - f_W(q,p) dqdp. \tag{10}$$

- Não-classicalidade do sistema.

Aplicações de computação quântica, emaranhamento.

## 2.4 - Operadores na representação de Wigner

- Cada observável $A(Q, P)$ possui uma função correspondente na representação de Wigner, dada por

$$A_w(q, p) = \int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q - \frac{z}{2}|A(Q, P)|q + \frac{z}{2}\rangle \tag{11}$$

## 2.5 - Propriedades dos operadores na representação de Wigner

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \int dqdpA_w(q,p)f_w(q,p) = Tr\rho A. \qquad (12)$$

- Se $A = A(P)$ ( isto é, independente de $Q$), então $A_w = A(p)$. Ou seja, eles terão a mesma forma funcional, com a ressalva que os operadores $P$ serão substituídos pelas variáveis $p$.

- Se $A = A(Q)$ ( isto é, independente de $P$), então $A_w(p,q) = A(q)$. Ou seja, eles terão a mesma forma funcional, com a ressalva que os operadores $Q$ serão substituídos pelas variáveis $q$.
- Se $A(Q,P) = c$ onde $c$ é uma constante, então

$$A_w(q,p) = A(Q,P). \tag{13}$$

$$TrA = (2\pi\hbar)^{-3} \int dqdpA_w(q,p). \tag{14}$$

$$\int dpA_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3} \langle q|A|q\rangle. \tag{15}$$

$$\int dqA_w(q,p) = (2\pi\hbar)^{-3} \langle p|A|p\rangle. \tag{16}$$

## 2.6 - Produto de operadores na representação de Wigner

- Consideraremos agora a equivalência em Wigner de um produto de operadores $AB$, e encontraremos a expressão que expressa $(AB)_w$ em termos de $A_w$ e $B_w$. Temos que,

$$\begin{aligned}(AB)_w &= A_w(q,p)e^{\frac{i\Lambda}{2\hbar}}B_w(q,p) = B_w(q,p)e^{\frac{-i\Lambda}{2\hbar}}A_w(q,p) \\ &= A_w(q,p) \star B_w(q,p),\end{aligned} \tag{17}$$

onde $\Lambda = (\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p} - \overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q})$.

## 2.7 - Evolução Temporal da Função de Wigner

- Tomando a equação

$$i\hbar\frac{\partial\rho(t)}{\partial t} = [H(t), \rho(t)], \tag{18}$$

e aplicando nela o operador,

$$(2\pi\hbar)^{-3}\int dzexp(\frac{ipz}{\hbar})\langle q - \frac{z}{2}|.|q + \frac{z}{2}\rangle,$$

em ambos os lados, temos que

$$i\hbar\frac{\partial f_w(q,p,t)}{\partial t} = \{H_w, f_w\}_M,$$

onde $\{a, b\}_M = a \star b - b \star a$ é o parentesis de Moyal.

$$
\begin{aligned}
i\hbar\frac{\partial f_w(q,p,t)}{\partial t} &= f_w(1+i\hbar\Lambda-\frac{\hbar^2}{4}\Lambda^2+...)H_w \\
&- H_w(1+i\hbar\Lambda-\frac{\hbar^2}{4}\Lambda^2+...)f_w.
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial f_w(q,p,t)}{\partial t} = f_w H_w - H_w f_w.
$$

$$
\frac{\partial f_w(q,p,t)}{\partial t} = \{f_w, H_w\}.
$$

- No limite $\hbar \to 0$ a função de Wigner obedece a equação de Liouville clássica.

## 2.8 - Definição do Produto de Weyl

- O produto estrela (também denominado produto de Weyl), entre duas funções $f(q,p)$ e $g(q,p)$ é definido por

$$f(q,p) \star g(q,p) = f(q,p) \exp[\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_q}\overrightarrow{\partial_p} - \overleftarrow{\partial_p}\overrightarrow{\partial_q})]g(q,p), \tag{19}$$

onde as setas sobre os operadores diferenciais indicam o sentido em que eles se aplicam.

- O produto estrela entre duas funções no espaço de fase eleva uma delas a categoria de operador,

$$\begin{aligned} f(q,p)\star g(q,p) &= f(q+\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p}, p-\frac{i\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_p})g(q,p) \\ &= f(q,p)g(q-\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_p}, p+\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_q}). \end{aligned} \tag{20}$$

- Operador-estrela: $\widehat{f}(q,p) = f(q,p)\star$.

**Propriedades do Produto de Weyl**

- Produto estrela onde um dos fatores é uma constante. Seja $c \in C$. Então

$$c \star f(q,p) = f(q,p) \star c = cf(q,p). \tag{21}$$

- O produto estrela é associativo,

$$(f(q,p) \star g(q,p)) \star h(q,p) = f(q,p) \star (g(q,p) \star h(q,p)). \tag{22}$$

- O produto estrela não é comutativo,

$$f(q,p) \star g(q,p) \neq g(q,p) \star f(q,p). \tag{23}$$

- A conjugação complexa inverte a ordem do produto estrela.

$$(f \star g)^\dagger = g^\dagger \star f^\dagger. \tag{24}$$

- A Integral do Produto estrela no Espaço de Fase

$$\int f(q,p) \star g(q,p)dqdp = \int f(q,p)g(q,p)dqdp. \tag{25}$$

- **Problemas:** A função de Wigner é real, o que dificulta a construção de uma teoria de calibre (interação) no espaço de fase.
- Dificuldade de analisar superposição de estados.

- **Tentativas de solução:** Procura-se introduzir uma função de onda (complexa, portanto admitindo fases) no espaço de fase.

- Torres-Vega e Frederick (1990) introduziram uma função de onda, $\psi_{TV}(q,p)$ que entretanto não possui interpretação física geral.

- Oliveira et al (2004) introduziram uma função, $\psi(q,p)$, que se conecta à função de Wigner. Isto garante a interpretação física da teoria.

Foi utilizada teorias de representação de grupo de simetria, que deu origem a mecânica quântica simplética.

A função de onda $\psi(q,p)$ foi denominada de quasi-amplitude de probabilidade.

**Espaço de Hilbert** $H(\Gamma)$

- A introdução do espaço de Hilbert associado ao espaço de fase $\Gamma$, pode ser feita considerando o conjunto das funções complexas de quadrado integrável, $\phi(q, p)$ em $\Gamma$, tal que

$$\int dpdq\phi^*(q, p)\phi(q, p) < \infty \tag{26}$$

**Grupo de Galilei**

$$\bar{x} = Rx - vt + a,$$
$$\bar{t} = t + b, \tag{27}$$

onde $R$ representa uma rotação espacial; $a$, uma translação espacial; $b$, uma translação temporal; e $v$, a velocidade relativa entre os dois referenciais inerciais.

A álgebra de Galilei estendida é definida por,

$$
\begin{aligned}
[\widehat{L_i}, \widehat{L_j}] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{L_k}, \\
[\widehat{L_i}, \widehat{K_j}] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{K_k}, \\
[\widehat{L_i}, \widehat{P_j}] &= i\hbar\epsilon_{ijk}\widehat{P_k}, \\
[\widehat{K_i}, \widehat{P_j}] &= i\hbar m\delta_{ij}\mathbf{1}, \\
[\widehat{K_i}, \widehat{H}] &= i\hbar\widehat{P_i},
\end{aligned}
\tag{28}
$$

$$[\widehat{P_i}, \widehat{P_j}] = 0,$$

$$[\widehat{P_i}, \widehat{H}] = 0,$$

$$[\widehat{L_i}, \widehat{H}] = 0,$$

$$[\widehat{P_i}, \widehat{H}] = 0.$$

Os operadores definidos a seguir satisfazem a álgebra de Galilei-Lie,

$$\widehat{Q} = q\star = q + \frac{i\hbar}{2}\partial_p,$$

$$\widehat{P} = p\star = p - \frac{i\hbar}{2}\partial_q,$$

$$\widehat{K} = k_i\star = mq_i \star - tp_i\star = m\widehat{Q_i} - t\widehat{P_i},$$

$$\widehat{L}_i = \epsilon_{ijk}\widehat{Q_j}\widehat{P_k} = \epsilon_{ijk} q_j p_k - \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk} q_j \frac{\partial}{\partial p_k} + \frac{i\hbar}{2}\epsilon_{ijk} p_k \frac{\partial}{\partial q_j} + \frac{\hbar^2}{4}\frac{\partial^2}{\partial q_j \partial p_k},$$

$$\widehat{H} = \frac{\widehat{P}^2}{2m}.$$

**Interpretação Física**

Os operadores $\widehat{Q}$ e $\widehat{P}$ se transformam da seguinte forma

$$exp(-i\mathbf{v}.\frac{\widehat{K}}{\hbar})\widehat{P}_j exp(i\mathbf{v}.\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = \widehat{P}_j + mv_j\mathbf{1},$$

$$exp(-i\mathbf{v}.\frac{\widehat{K}}{\hbar})\widehat{Q}_j exp(i\mathbf{v}.\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = \widehat{Q}_j + v_j t\mathbf{1}.$$

E satisfazem a relação de comutação

$$[\widehat{Q}_j, \widehat{P}_n] = i\hbar\delta_{jn}\mathbf{1}.$$

Para definir uma base em $H(\Gamma)$ com conteúdo de espaço de fase, definiremos os operadores c-numbers, $\overline{P} = 2p\mathbf{1}$ e $\overline{Q} = 2q\mathbf{1}$. Que se transformam da seguinte forma,

$$exp(-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar})\overline{Q}exp(iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = \overline{Q} + vt\mathbf{1},$$

$$exp(-iv\frac{\widehat{K}}{\hbar})\overline{P}exp(iv\frac{\widehat{K}}{\hbar}) = \overline{P} + mv\mathbf{1}.$$

E satisfazem a relação,

$$[\overline{Q}, \overline{P}] = 0.$$

Assim, podemos escrever

$$\overline{Q}|q,p\rangle = q|q,p\rangle,$$

$$\overline{P}|q,p\rangle = p|q,p\rangle,$$

$$\langle q,p|q',p'\rangle = \delta(q-q')\delta(p-p'),$$

$$\int dqdp|q,p\rangle\langle q,p| = 1.$$

$$\psi(q,p,t) = \langle q,p|\psi(t)\rangle.$$

$\widehat{H}$ é o gerador das translações temporais. Sendo assim, podemos definir

$$\psi(q,p,t) = e^{\frac{-i\widehat{H}t}{\hbar}} \star \psi(q,p,0).$$

Se derivarmos a última equação com relação ao tempo, obtemos

$$i\hbar\partial_t\psi(q,p,t) = \widehat{H}\psi(q,p,t).$$

**A equação de Schrodinger no Espaço de Fase**

- Se a partícula estiver sujeita a um potencial $V(\widehat{Q})$, temos a equação de Schroedinger no espaço de fase,

$$
\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\psi(q,p,t) &= \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{8m}\frac{\partial^2}{\partial q^2} - \frac{i\hbar p}{2m}\frac{\partial}{\partial q}\right)\psi(q,p,t) \\
&+ V\left(q + \frac{i\hbar}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)\psi(q,p,t). \qquad (29)
\end{aligned}
$$

**Associação com a função de Wigner**

- Podemos mostrar que a função definida por $f_w(q,p) = \psi(q,p) \star \psi^\dagger(q,p)$ é a função de Wigner.
- Também é útil observar que $\psi(q,p)$ e $f_w(q,p)$ satisfazem a mesma equação de $\star$-valores, $\widehat{H}\psi(q,p) = E\psi(q,p)$.

# 3. Yang-Mills-Higgs Field in Phase Space

The Lagrangian, $\mathcal{L}$ for the Yang-Mills-Higgs field with symmetry $SU(2)$ is given by

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{a}_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_{a} + \frac{1}{2} (D_{\mu}\phi)^{\dagger} (D^{\mu}\phi) - V(\phi) \tag{30}$$

$$F^{a}_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{a}_{\mu} + g A^{b}_{\mu} A^{c}_{\nu}, \tag{31}$$

$$(D_{\mu}\phi) = \partial_{\mu}\phi - i g A^{b}_{\mu} T^{b} \phi, \tag{32}$$

with $T^{b} = \sigma/2$, $b = 1, 2$, generating the algebra of the group $SU(2)$, and $g$ is a coupling constant.

scalar Higgs field potential is given by

$$V(\phi) = \mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4, \tag{33}$$

where $\mu$ and $\lambda$ are constants. In the (2+1)-dimensional Minkowski space, and for the spatially homogeneous Yang-Mills-Higgs field, which satisfies the conditions

$$\partial_i A^a_\mu = \partial_i \phi = 0, i = 1, 2,$$

the Gauge $A^\alpha_0 = 0$, the Lagrangiana can be written as

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{A}}_1^2 + \dot{\mathbf{A}}_2^2) - g\Big[\frac{1}{2}\mathbf{A}_1^2\mathbf{A}_2^2 \\
&- \frac{1}{2}(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)^2 + (\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_2^2)\phi^2 - (\mathbf{A}_1\phi)^2 - (\mathbf{A}_2\phi)^2\Big] - V(\phi),
\end{aligned} \tag{34}
$$

on what $\phi = (\phi^1, \phi^2, \phi^3)$, $A_1 = (A_1^1, A_1^1, A_1^3)$ e $A_2 = (A_2^1, A_2^1, A_2^3)$.

the Hamiltonian of the system is written as

$$\widehat{H} = \frac{1}{2}(\widehat{p}_1^2 + \widehat{p}_2^2) + g^2 v^2(\widehat{q}_1^2 + \widehat{q}_2^2) + \frac{1}{2} g^2 \widehat{q}_1^2 \widehat{q}_2^2, \tag{35}$$

where $\phi_0 = (0, 0, v)$, $q_1 = A_1^1$, $q_2 = A_2^2$, $p_1 = \dot{q}_1$, $p_2 = \dot{q}_2$ and the other components of the Yang-Mills field are null. Also, $\omega^2 = 2g^2 v^2$.

in terms of create and destroy operators, given by

$$\widehat{a} = \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_1 \star + i \frac{1}{\sqrt{2\omega}} p_1 \star \right), \tag{36}$$

$$\widehat{a}^{\dagger} = \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_1 \star - i \frac{1}{\sqrt{2\omega}} p_1 \star \right), \tag{37}$$

$$\widehat{b} = \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_2 \star + i \frac{1}{\sqrt{2\omega}} p_2 \star \right), \tag{38}$$

$$\widehat{b}^{\dagger} = \left( \sqrt{\frac{\omega}{2}} q_2 \star - i \frac{1}{\sqrt{2\omega}} p_2 \star \right), \tag{39}$$

where the operators $q_i\star$ and $p_i\star$ are given by

$$q_i\star = q_i + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p_i}, \tag{40}$$

$$p_i\star = p_i - \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_i}, \tag{41}$$

the Hamiltonian given in Eq.(35) can be written as

$$\widehat{H} = \omega(\widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \widehat{b}^\dagger \widehat{b} + 1) + \frac{1}{16v^2}(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger)^2(\widehat{b} + \widehat{b}^\dagger)^2. \tag{42}$$

In this way, we can define the free part of the Hamiltonian as

$$\widehat{H}_0 = \omega(\widehat{a}^\dagger \widehat{a} + \widehat{b}^\dagger \widehat{b} + 1). \tag{43}$$

While the interaction part is written as

$$\widehat{V} = \frac{1}{16v^2}(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger)^2(\widehat{b} + \widehat{b}^\dagger)^2. \tag{44}$$

The equation to be analyzed is given by

$$H \star \psi(q_1, p_1, q_2, p_2) = E\psi(q_1, p_1, q_2, p_2). \tag{45}$$

The free part is given by

$$H_0 \star \psi^{(0)}_{n_1,n_2}(q_1, p_1, q_2, p_2) = E_{n_1,n_1}\psi^{(0)}_{n_1,n_2}(q_1, p_1, q_2, p_2), \tag{46}$$

he solution to the free part $\widehat{H}_0$ of the Hamiltonian has the amplitude in written phase space as

$$\psi^{(0)}_{n_1,n_2}(q_1,p_1,q_2,p_2)=\phi_{n_1}(q_1,p_1)\chi_{n_2}(q_2,p_2), \tag{47}$$

where $\phi_{n_1}(q_1,p_1)$ and $\chi_{n_2}(q_2,p_2)$ are the solutions that describe particles 1 and 2, respectively.

The eigenvalue equations are given by

$$\widehat{a}\phi_{n_1} = \sqrt{n_1}\phi_{n_1-1}, \tag{48}$$

$$\widehat{a^\dagger}\phi_{n_1} = \sqrt{n_1+1}\phi_{n_1+1}, \tag{49}$$

$$\widehat{b}\chi_{n_2} = \sqrt{n_2}\chi_{n_2-1}, \tag{50}$$

$$\widehat{b^\dagger}\chi_{n_2} = \sqrt{n_2+1}\chi_{n_2+1}. \tag{51}$$

Using

$$\widehat{a}\phi_0 = 0,$$
$$\widehat{b}\chi_0 = 0,$$

we get the solution

$$\psi_{0,0}^{(0)} = \frac{1}{\pi} e^{-\omega q_1^2 - \frac{1}{\omega} p_1^2} e^{-\omega q_2^2 - \frac{1}{\omega} p_2^2}. \tag{52}$$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(0)}_{n_1,n_2}(q_1,p_1,q_2,p_2) \quad &= \quad \mathcal{N} e^{-\left(\omega q_1^2+\frac{1}{\omega}p_1^2\right)} L_{n_1}\left(\omega q_1^2+\frac{1}{\omega}p_1^2\right) e^{-\left(\omega q_2^2+\frac{1}{\omega}p_2^2\right)} \\
&\times \quad L_{n_2}\left(\omega q_2^2+\frac{1}{\omega}p_2^2\right),
\end{aligned}
\tag{53}
$$

where $L_{n_1}$ and $L_{n_2}$ are Laguerre polynomials of order $n_1$ and $n_2$, respectively; and $\mathcal{N}$ is a normalization constant.
The eigenvalues of the amplitudes from Eq.(53) are given by

$$
E_{n_1,n_2} = (n_1+n_2+1)\omega. \tag{54}
$$

$$\psi^{(1)}_{n_1,n_2}(q_1, p_1, q_2, p_2) = \psi^{(0)}_{n_1,n_2}(q_1, p_1, q_2, p_2) + \Gamma,$$

em que $\Gamma$ é igual a

$$\sum_{m_1 \neq n_1, m_2 \neq n_2} \left( \frac{\int \psi^{*(0)}_{m_1,m_2} \widehat{V} \psi^{(0)}_{n_1,n_2} dq_1 dp_1 dq_2 dp_2}{E^{(0)}_{n_1,n_2} - E^{(0)}_{m_1,m_2}} \right) \psi^{(0)}_{m_1,m_2}.$$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(1)}_{0,0}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \psi^{(0)}_{0,0}(q_1, p_1, q_2, p_2) \\
&- \frac{1}{4\omega^3}\left(-\frac{2\sqrt{2}+3}{4}\psi^{(0)}_{2,2}(q_1, p_1, q_2, p_2)\right).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(1)}_{1,0}(q_1, p_1, q_2, p_2) &= \psi^{(0)}_{1,0}(q_1, p_1, q_2, p_2) - \frac{1}{4\omega^3}\Big[\frac{\sqrt{2}}{2}\psi^{(0)}_{1,2}(q_1, p_1, q_2, p_2) \\
&- \frac{\sqrt{6}}{2}\psi^{(0)}_{3,0}(q_1, p_1, q_2, p_2) - \frac{3}{4}\psi^{(0)}_{3,2}(q_1, p_1, q_2, p_2)\Big].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(1)}_{0,1}(q_1,p_1,q_2,p_2) &= \psi^{(0)}_{0,1}(q_1,p_1,q_2,p_2) \\
&- \frac{1}{4\omega^3}\Big[-\frac{\sqrt{2}}{2}\psi^{(0)}_{1,2}(q_1,p_1,q_2,p_2) \\
&+ \frac{\sqrt{6}}{2}\psi^{(0)}_{3,0}(q_1,p_1,q_2,p_2) + \frac{3}{4}\psi^{(0)}_{3,2}(q_1,p_1,q_2,p_2)\Big].
\end{aligned}
$$

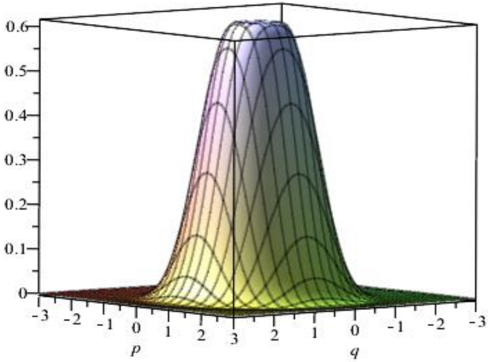
$$
\begin{aligned}
\psi^{(1)}_{1,1}(q_1,p_1,q_2,p_2) &= \psi^{(0)}_{1,1}(q_1,p_1,q_2,p_2) - \frac{1}{4\omega^3}\Big[\sqrt{6}\psi^{(0)}_{1,3}(q_1,p_1,q_2,p_2) \\
&- \frac{3\sqrt{6}}{2}\psi^{(0)}_{3,1}(q_1,p_1,q_2,p_2) - \frac{3}{2}\psi^{(0)}_{3,3}(q_1,p_1,q_2,p_2)\Big],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi^{(1)}_{2,0}(q_1,p_1,q_2,p_2) &= \psi^{(0)}_{2,0}(q_1,p_1,q_2,p_2) \\
&- \frac{1}{4\omega^3}\Big[-\frac{2\sqrt{2}}{3}\psi^{(0)}_{2,2}(q_1,p_1,q_2,p_2) \\
&- \sqrt{3}\psi^{(0)}_{4,0}(q_1,p_1,q_2,p_2) - \frac{\sqrt{6}}{2}\psi^{(0)}_{4,2}(q_1,p_1,q_2,p_2)\Big],
\end{aligned}
$$

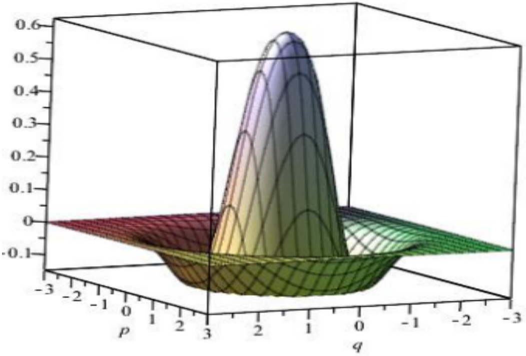
The Wigner function for the Yang-Mills-Higgs system for each order of the perturbed amplitude can be calculated using the equation

$$f_W(q_1, p_1, q_2, p_2) = \psi^{*(1)}_{n_1,n_2}(q_1, p_1, q_2, p_2) \star \psi^{(1)}_{n_1,n_2}(q_1, p_1, q_2, p_2). \qquad (55)$$

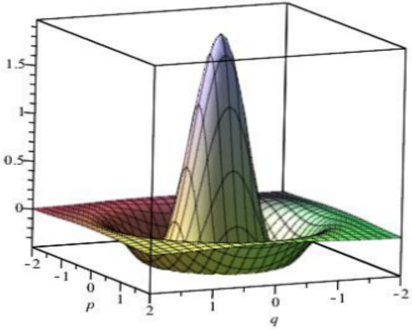
## Yang-Mills-Higgs, Wigner function, $n_1 = n_2 = 0$



## Yang-Mills-Higgs,Wigner function ,$n_1 = 1, n_2 = 0$



## Yang-Mills-Higgs, wigner function, $n_1 = 2, n_2 = 0$



## Yang-Mills-Higgs, negativity parameter

Tabela: Negativity parameter Yang-Mills-Higgs

| $n_1, n_2$ | $\eta(\psi)$ |
|---|---|
| $0, 0$ | $0.18993$ |
| $1, 0$ | $0.26554$ |
| $0, 1$ | $0.26554$ |
| $1, 1$ | $0.32441$ |
| $2, 0$ | $0.32441$ |
| $0, 2$ | $0.32441$ |

# Trabalhos Desenvolvidos:

International Journal of Modern Physics A
Vol. 35 (2020) 2050100 (15 pages)

DOI: 10.1142/S0217751X20501006

World Scientific
www.worldscientific.com

## Analytical solution for quantum quartic oscillator in phase space

A. X. Martins,* T. M. R. Filho,* R. G. G. Amorim,*,†,‡,§ R. A. S. Paiva,*
G. Petronilo* and S. C. Ulhoa*,‡,¶

*International Center of Physics, Instituto de Física,
Universidade de Brasília, 70910-900, Brasília, DF, Brazil
†Faculdade Gama, Universidade de Brasília,
70910-900, Brasília, DF, Brazil
‡Canadian Quantum Research Center,
204-3002 32 Ave Vernon, BC V1T 2L7 Canada
§ronniamorim@gmail.com
¶sc.ulhoa@gmail.com

Received 15 April 2020
Revised 9 June 2020
Accepted 10 June 2020

In this work, we address the quartic quantum oscillator in phase space using two approaches: computational and algebraic methods. In order to achieve such an aim, we built simplistic unitary representations for Galilei group, as a consequence the Schrödinger equation is derived in the phase space. In this context, the amplitudes of quasi-probability are associated with the Wigner function. In a computational way, we apply the techniques of Lie methods. As a result, we determine the solution of the quantum quantum oscillator in the phase space and calculate the corresponding Wigner function. We also calculated the negativity parameter of the analyzed system.

Springer Link

General and Applied Physics | Published: 21 June 2019

# Wigner Function and Non-classicality for Oscillator Systems

H. Dessano, R. A. S. Paiva, R. G. G. Amorim, S. C. Ulhoa & A. E. Santana

*Brazilian Journal of Physics* **49**, 715–725(2019) | Cite this article



## Abstract

The Schrödinger equation in phase space is used to calculate the Wigner function for oscillator systems. The first is two oscillators including dissipative effects. In this case, the non-classicality of the states is studied by the non-classicality indicator of the Wigner function, which is calculated as a function of the dissipation parameter. The second oscillator system is non-linear pendulum. Analytical results are derived and the Wigner function is analyzed.

Hindawi
Advances in High Energy Physics
Volume 2020, Article ID 4269246, 9 pages
https://doi.org/10.1155/2020/4269246

Hindawi

*Research Article*

# Zeeman Effect in Phase Space

**R. A. S. Paiva,[1] R. G. G. Amorim ,[1,2] S. C. Ulhoa ,[1] A. E. Santana,[1] and F. C. Khanna[3]**

[1]*International Center of Physics, Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900 Brasília, DF, Brazil*
[2]*Faculdade Gama, Universidade de Brasília, 72444-240 Brasília, DF, Brazil*
[3]*Department of Physics and Astronomy, University of Victoria, BC, Canada V8P 5C2*

Correspondence should be addressed to R. G. G. Amorim; ronniamorim@gmail.com

Received 9 September 2019; Revised 21 October 2019; Accepted 21 November 2019; Published 8 January 2020

Academic Editor: Smarajit Triambak



The two-dimensional hydrogen atom in an external magnetic field is considered in the context of phase space. Using the solution of the Schrödinger equation in phase space, the Wigner function related to the Zeeman effect is calculated. For this purpose, the Bohlin mapping is used to transform the Coulomb potential into a harmonic oscillator problem. Then, it is possible to solve the Schrödinger equation easier by using the perturbation theory. The negativity parameter for this system is realised.

Hindawi
Advances in High Energy Physics
Volume 2020, Article ID 7010957, 6 pages
https://doi.org/10.1155/2020/7010957

Hindawi

*Research Article*

# Analytical Solution for the Gross-Pitaevskii Equation in Phase Space and Wigner Function

**A. X. Martins,[1] R. A. S. Paiva,[1] G. Petronilo,[1] R. R. Luz,[1] R. G. G. Amorim,[1,2,3] S. C. Ulhoa,[1,3] and T. M. R. Filho[1]**

[1]*International Center of Physics, Instituto de Física, Universidade de Brasília, 70910-900 Brasília, DF, Brazil*
[2]*Faculdade Gama, Universidade de Brasília, 70910-900 Brasília, DF, Brazil*
[3]*Canadian Quantum Research Center, 204-3002 32 Ave Vernon, BC, Canada V1T 2L7*

Correspondence should be addressed to R. G. G. Amorim; ronniamorim@gmail.com

Received 30 January 2020; Accepted 6 April 2020; Published 30 April 2020

Academic Editor: Salvatore Mignemi



In this work, we study symplectic unitary representations for the Galilei group. As a consequence a nonlinear Schrödinger equation is derived in phase space. The formalism is based on the noncommutative structure of the star product, and using the group theory approach as a guide a physically consistent theory is constructed in phase space. The state is described by a quasi-probability amplitude that is in association with the Wigner function. With these results, we solve the Gross-Pitaevskii equation in phase space and obtained the Wigner function for the system considered.

# Considerações Finais

**Trabalhos em Desenvolvimento:**

- Quarks Não Relativísticos na Mecânica Quântica Simplética.

- Sistemas com Potenciais Polinomiais.

- Determinar a função de Wigner para o sistema Pêndulo Duplo Quântico.

- Desenvolver um Formalismo para analisar caos quântico associado ao expoente de Lyapunov no espaço de fase clássico.

- Emaranhamento Quântico associado a função de Wigner.

## Agradecimentos - Grupo Produto Estrela

- Professor Ademir E. Santana.
- Professora Adriana.
- Rochelle.
- Gabriella.
- Isa.
- Professor Ronni Amorim.
- Carol.
- Professor Sérgio Ulhoa.
- Renato R. Luz.
- Gustavo Petronilo.
- Professor Hara Dessano.
- Professor Marciano.
- Professor Eduardo.
- Professor Lucas Rodrigues
- Professor Kayo Vaz.
- Professor Alessandro.
- Roemir

# Referências Bibliográficas


- AMORIM, R. G. G. et al. Funçao de Wigner-80 anos e as origens da geometria nao-comutativa. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 3, p. 1-14, 2013.
- H. Weyl, Z. Phys. **46** (127) 1.
- J. E. Moyal, Proc. Cambridge Philos. Soc. **45** (1949) 99.
- H. S. Snyder,Phys. Rev. **71** (1947) 38.
- R. J. Szabo, Phys. Rep. **378** (2003) 207.
- N. Seiberg, E. Witten, JHEP **9909** (1999) 032, hepth/9909142.
- E. P. Wigner, Z. Phys. Chem. **B19 40** (1932) 749.
- M. Hillery, R. F. O'Connel, M. O. Scully, E. P. Wigner; Phys. Rep. **106** (1984) 121.
- E. P. Wigner, Ann. Math. **40** (1939) 149.
- M. D. Oliveira, M. C. B. Fernandes, F. C. Khanna, A. E. Santana, J. M. D. Vianna, Ann. Phys. (2004).

**OBRIGADO!**