Séries de Fourier e Aplicações em Física

Laura Goulart

UESB

3 de maio de 2023

Uma breve história de J. B. J. Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830) viveu na época de Napoleão, para quem trabalhou na França e no Egito ocupado pelos franceses. Mas seu nome foi imortalizado pelas séries trigonométricas que introduziu em 1807, e até hoje deslumbram os matemáticos, os físicos, os estatísticos e os engenheiros.

Uma breve história de J. B. J. Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier(1768-1830) viveu na época de Napoleão, para quem trabalhou na França e no Egito ocupado pelos franceses. Mas seu nome foi imortalizado pelas séries trigonométricas que introduziu em 1807, e até hoje deslumbram os matemáticos, os físicos, os estatísticos e os engenheiros. Essas séries são uma verdadeira dádiva para quem precisa descrever uma função mais ou menos complicada em uma forma simples de visualizar e manipular.

A história das séries de Fourier ilustra como a solução de um problema na físico acaba gerando novas fronteiras na matemática.

A história das séries de Fourier ilustra como a solução de um problema na físico acaba gerando novas fronteiras na matemática. Fourier foi levado a desenvolver suas séries ao estudar a propagação do calor em corpos sólidos. Admitindo que essa propagação devesse se dar por ondas de calor e levando em conta que a forma mais simples de uma onda é uma função senoidal, Fourier mostrou que qualquer função, por mais complicada que seja, pode ser decomposta como de senos e cossenos.

Para falar a verdade, a matemática de Fourier era meio capenga, sem o rigor que era exigido por seus contemporâneos como Lagrange e Laplace. Assim mesmo, ele conseguiu o apoio e a admiração desses gigantes, além de obter resultados que escaparam pelos dedos de outros gênios como Bernoulli e Euler.

Para falar a verdade, a matemática de Fourier era meio capenga, sem o rigor que era exigido por seus contemporâneos como Lagrange e Laplace. Assim mesmo, ele conseguiu o apoio e a admiração desses gigantes, além de obter resultados que escaparam pelos dedos de outros gênios como Bernoulli e Euler. `http://www.seara.ufc.br/tintin/matematica/fourier/`

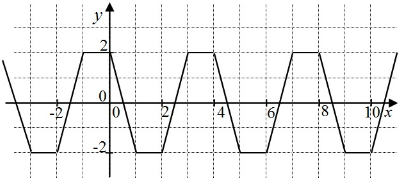
Funções Periódicas

Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ é dita **periódica** de período $T \in \mathbb{R}$ quando $f(x + T) = f(x), \forall x \in A$.

Funções Periódicas

Uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ é dita **periódica** de período $T \in \mathbb{R}$ quando $f(x+T) = f(x), \forall x \in A$.

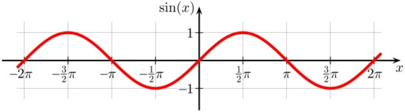
As funções seno e cosseno são exemplos clássicos de funções periódicas.



A função representada graficamente acima é periódica de período $T = 5$ unidade. Observe que a curva se repete, ie, ela apresenta as mesmas características em intervalos subsequentes.

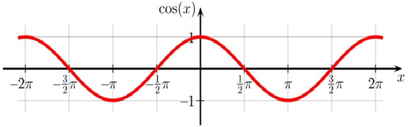
Função Seno

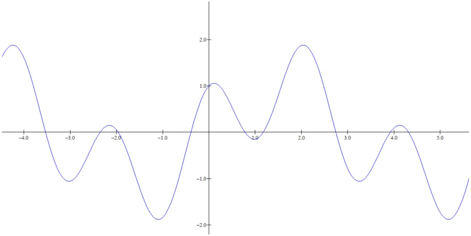
A função **seno** é periódica de período $T = 2\pi$ representada pelo gráfico abaixo chamado de **senóide**.



Função Cosseno

A função **cosseno** também é periódica, com mesmo período e amplitude do seno, porém translada na razão de $\frac{\pi}{2}$ em relação ao seno. O nome de seu de **cossenóide**.





Observe que a curva acima também é periódica, mas não é apenas seno ou cosseno. A questão então é: *"Como encontrar uma função matemática que descreve uma curva como essa?"*

Foi isso que Fourier descobriu, no início do século 19. Segundo ele, qualquer função periódica, por mais complicada que seja, pode ser representado como soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convinientemente.

Foi isso que Fourier descobriu, no início do século 19. Segundo ele, qualquer função periódica, por mais complicada que seja, pode ser representado como soma de várias funções seno e cosseno com amplitudes, fases e períodos escolhidos convinientemente.

Observação 1

Muitas vezes é vantajoso tomar o período $T = 2L$ *para as funções que iremos estudar e defini-las no intervalo* $[-L, L]$; *com o objetivo de simplificar as operações.*

Ortogonalidade das Funções Seno e Cosseno

Definimos o seguinte produto interno:

$$< f, g >= \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)g(t)dt \tag{1}$$

Diremos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ é **ortonormal** quando $< f_i, f_j >= \delta_{ij}$.

Diremos que um conjunto de funções $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ é **ortonormal** quando $< f_i, f_j >= \delta_{ij}$.

Proposição 1

As funções $\sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ *e* $\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$ *para* $m = 1, 2, \cdots$ *formar um conjunto ortonormal de funções definidas em* $[-L, L]$.

Séries Trigonométricas

Chama-se **séries trigonométricas** a seguinte série:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad (2)$$

onde $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ são números reais denominados *coeficientes da série.* Esses coeficientes, como veremos, são as amplitudes de cada onda componente do desenvolvimento da série.

Séries Trigonométricas

Chama-se **séries trigonométricas** a seguinte série:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad (2)$$

onde $a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ são números reais denominados *coeficientes da série.* Esses coeficientes, como veremos, são as amplitudes de cada onda componente do desenvolvimento da série.

A série (2) é chamada de **série de Fourier** de uma função $f(x)$ desde que essa série seja convergente.

Teorema 1

Suponhamos que

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \textit{converge}$$

uniformemente para todo $x \in [-L, L]$. *Então:*

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \tag{3}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{4}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{5}$$

Funções Seccionalmente Contínua

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** em um intervalo $[a, b]$ se existe uma partição $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq$ $\leq \cdots \leq b = x_n$ tal que:

i) $f(x)$ é contínua em $[x_i, x_{i+1}]$.

ii) $f(x_i + 0) = f(x_i^+) = \lim\limits_{x \to x_i^+} f(x) < +\infty$ e

$$f(x_i - 0) = f(x_i^-) = \lim_{x \to x_i^-} f(x) < +\infty.$$

Funções Seccionalmente Contínua

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente contínua** em um intervalo $[a, b]$ se existe uma partição $a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \leq \cdots \leq b = x_n$ tal que:

i) $f(x)$ é contínua em $[x_i, x_{i+1}]$.

ii) $f(x_i + 0) = f(x_i^+) = \lim\limits_{x \to x_i^+} f(x) < +\infty$ e

$$f(x_i - 0) = f(x_i^-) = \lim_{x \to x_i^-} f(x) < +\infty.$$

É claro que toda função contínua é seccionalmente contínua.

Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **seccionalmente diferenciável** se f, f' seccionalmente contínua.

Teorema de Fourier

Teorema 2

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função seccionalmente diferenciável e de período* $T = 2L$, *então a equação 2 converge uniformemente para o valor médio de* f *em cada ponto* $x \in \mathbb{R}$, *isto é,*

$$\frac{1}{2}\left(f(x^+) + f(x^-)\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{6}$$

Teorema de Weierstrass

Teorema 3

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua de período $T = 2L$, então f pode ser aproximada por uma sequência de polinômios trigonométricos da seguinte forma:

$$S_n(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{7}$$

Uma função que satisfaz as hipóteses dos Teoremas de Fourier e de Weierstrass é garantida a convergência uniforme da equação 2.

Uma função que satisfaz as hipóteses dos Teoremas de Fourier e de Weierstrass é garantida a convergência uniforme da equação 2.

Ou seja,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(f)(x) = f(x)$$

Exemplos

1) Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, de período $T = 2L$ e par, ie, $f(-x) = f(x)$. Então, a série de Fourier será somente de cossenos.

Exemplos

1) Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, de período $T = 2L$ e par, ie, $f(-x) = f(x)$. Então, a série de Fourier será somente de cossenos.

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$b_n = 0$$

2) Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, de período $T = 2L$ e ímpar, ie, $f(-x) = -f(x)$. Então, a série de Fourier será somento de senos.

2) Suponhamos que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, de período $T = 2L$ e ímpar, ie, $f(-x) = -f(x)$. Então, a série de Fourier será somento de senos.

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

Força Constante Periódica

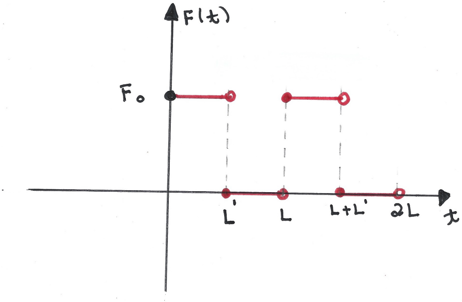
Vamos considerar uma força constante e periódica de período $T = L$ dada por:

$$F(t) = \begin{cases} F_0, 0 \leq t < L' \\ \\ 0, L' \leq t < L \end{cases}$$

Força Constante Periódica

Vamos considerar uma força constante e periódica de período $T = L$ dada por:

$$F(t) = \begin{cases} F_0, 0 \leq t < L' \\ \\ 0, L' \leq t < L \end{cases}$$



$$a_0 = \frac{1}{L/2}\int_0^L F(t)dt = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L'} F(t)dt + \overbrace{\int_{L'}^{L} F(t)dt}^{=0}\right] =$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^{L'} F_0 dt \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{2F_0 L'}{L}}$$

$$a_n = \frac{1}{L/2}\int_0^L F(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L/2}t\right)dt = \frac{2}{L}\left[\int_0^{L'} F(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L/2}t\right)dt + \right.$$

$$\left. + \overbrace{\int_{L'}^{L} F(t)\cos\left(\frac{n\pi}{L/2}t\right)dt}^{=0}\right] = \frac{2}{L}\int_0^{L'} F_0\cos\left(\frac{n\pi}{L/2}t\right)dt$$

Mudança de variável

$$u = \frac{2n\pi}{L}t$$

Mudança de variável

$$u = \frac{2n\pi}{L} t \Rightarrow du = \frac{2n\pi}{L} dt$$

Mudança de variável

$$u = \frac{2n\pi}{L} t \Rightarrow du = \frac{2n\pi}{L} dt$$

$$\boxed{t = 0 \Rightarrow u = 0 \ \text{ e } \ t = L' \Rightarrow u = \frac{2n\pi}{L} L'}$$

$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L} F_0}{\cancel{2} n\pi} \int_0^{\frac{2n\pi L'}{L}} \cos u \, du = \frac{F_0}{n\pi} \sin u \Big|_0^{\frac{2n\pi L'}{L}} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{\cancel{2}}{\cancel{L}} \cdot \frac{\cancel{L} F_0}{\cancel{2} n\pi} \int_0^{\frac{2n\pi L'}{L}} \cos u \, du = \frac{F_0}{n\pi} \sin u \Big|_0^{\frac{2n\pi L'}{L}} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_n = \frac{F_0}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi L'}{L}\right)}$$

Analogamente, prova-se que $b_n = \frac{F_0}{n\pi}\left[\cos\left(\frac{2n\pi L'}{L}\right) - 1\right]$

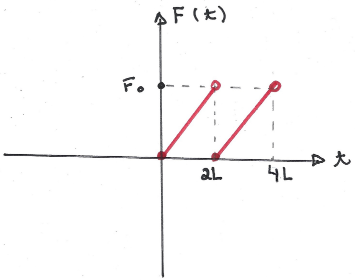
$$F(t) \sim F_0 \left\{ \frac{2L'}{L} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi L'}{L}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi} \left[\cos\left(\frac{2n\pi L'}{L}\right) - 1 \right] \right\}$$

Força Linear Periódica

Vamos considerar a força periódica de período $T = 2L$ dada pela seguinte função linear:

$$F(t) = F_0 t, \text{ para } 0 \leq t < 2L$$



Por se tratar de uma função ímpar, só teremos a parte dos senos.
Ou seja,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L F(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L} t\right) dt$$

Por se tratar de uma função ímpar, só teremos a parte dos senos.
Ou seja,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2F_0}{L}\int_0^L t\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt = \frac{LF_0}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\sin u\, du$$

Por se tratar de uma função ímpar, só teremos a parte dos senos.
Ou seja,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L F(t)\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt$$

$$b_n = \frac{2F_0}{L}\int_0^L t\sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right)dt = \frac{LF_0}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\sin u\, du$$

$$b_n = \frac{LF_0}{n^2\pi^2}\left(\underbrace{\sin(n\pi)}_{=0} - n\pi\underbrace{\cos(n\pi)}_{=(-1)^n}\right) \Rightarrow b_n = \frac{(-1)^{n+1}LF_0}{n\pi}$$

$$F(t) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} L F_0}{n\pi}$$