

Aplicações da teoria da informação e da estatística não extensiva a fenômenos de caos, difusão e massa dependente da posição

Prof. Dr. Ignacio Sebastián Gomez
Departamento de Ciências Exatas e Naturais - Área Física - UESB

VIII CICLO DE SEMINÁRIOS DO CURSO DE FÍSICA DA UESB DE ITAPETINGA 2022

Itapetinga, 17 de Novembro de 2022



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Conteúdo

- 1 Teoria da informação
 - Preliminares
 - Distância estatística em mapas caóticos
 - Modelos estatísticos curvados em Hamiltonianos e estados quânticos
- 2 Estatística não extensiva, massa dependente da posição e álgebras deformadas
 - Preliminares
 - Equação de Fokker-Planck com estruturas deformadas
 - Equação de Schrödinger com estruturas deformadas
- 3 Propostas em aberto/andamento
- 4 Conclusões

Conteúdo

- 1 Teoria da informação
 - Preliminares
 - Distância estatística em mapas caóticos
 - Modelos estatísticos curvados em Hamiltonianos e estados quânticos
- 2 Estatística não extensiva, massa dependente da posição e álgebras deformadas
 - Preliminares
 - Equação de Fokker-Planck com estruturas deformadas
 - Equação de Schrödinger com estruturas deformadas
- 3 Propostas em aberto/andamento
- 4 Conclusões



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires (UBA)
Ciudad Universitaria



Facultad de Ciencias Exactas
Universidad Nacional de La Plata (UNLP)



Instituto de Física
Universidade Federal da Bahia (UFBA)
Campus Ondina



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
(UESB) - Departamento de Ciências Exatas e Naturais
Campus Itapetinga (Juvino Oliveira)

Teoria da informação (TI): introdução

Claude Shannon - "A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, 1948"

é uma teoria sobre a transmissão da informação desde o emissor até o receptor.

"O problema fundamental da comunicação é reproduzir em um dado ponto, exata ou aproximadamente, uma mensagem produzida em outro ponto"

Suponhamos dispositivos que produzam símbolos. Como representar a **incerteza**?
dispositivo com 1 símbolo \implies incerteza de $\log_2(1) = 0$ bits (certeza)

dispositivo com 2 símbolos \implies incerteza igual a $\log_2(2) = -\log_2(1/2) = 1$ bit

Exemplo: molécula DNA, cadeias de nucleótidos A,C,G e T com probabilidades

$$p_A = 1/2 \quad , \quad p_C = 1/4 \quad , \quad p_G = 1/8 \quad , \quad p_T = 1/8$$

$$H = - \sum_{A,C,G,T} p_i \log_2(p_i) = 1.75 \text{ bits por símbolo}$$

Uma **codificação**: A=1, C=01, G=000, T=001 \implies ACAT=1011001

Nos dá a média de 7 dígitos/4 símbolos=1.75 dígitos x símbolo

A entropia de Shannon como medida de incerteza

Sejam duas moedas uma “honesta” e outra “enviesada”, caracterizadas pelos espaços de probabilidade

$$(M_1, p(M_1)) = (\{\text{cara, coroa}\}, \{p_{\text{cara}} = p_{\text{coroa}} = 0.5\})$$

$$(M_2, p(M_2)) = (\{\text{cara, coroa}\}, \{p_{\text{cara}} = 0.9, p_{\text{coroa}} = 0.1\})$$

$$H_{\text{honesta}} = H(M_1) = 1 \text{ bit} > H_{\text{enviesada}} = H(M_2) = 0.469 \text{ bits}$$

a entropia é uma medida de **incerteza** da informação

Generalizando, seja $\{p_i\}$ uma distribuição de probabilidade, em que $p_i \geq 0$ é a probabilidade do evento x_i e $\sum_{i=1}^N p_i = 1$, definem-se

$$S(\{p_i\}) = - \sum_{i=1}^N p_i \ln p_i \quad (\text{entropia de Shannon da distribuição } \{p_i\})$$

$$S(\{p_{ij}\}) = - \sum_{i,j=1}^{N,M} p_{ij} \ln p_{ij} \quad (\text{entropia de Shannon da distribuição } \{p_{ij}\})$$

Métricas, distâncias estatísticas

Distinguir distribuições de probabilidade quantifica o ganho de informação

Métrica ou distância: uma função $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$ tal que

- (1) não negatividade: $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$
- (2) identidade dos indiscerníveis: $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$
- (3) simetria: $d(x, y) = d(y, x)$
- (4) desigualdade triangular: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$

O conjunto X dotado com a métrica d resulta um **espaço métrico**.

Definição: Uma **distância estatística** é uma função $d : X \times X \mapsto \mathbb{R}_+$ em que X é o espaço de distribuições de probabilidade, podendo satisfazer uma ou mais propriedades anteriores de uma métrica.

Observação 1: **Pseudométricas** violam (2), **quasemétricas** violam (3) e **semimétricas** violam (4).

Observação 2: Distâncias estatísticas que satisfazem (1) e (2) são chamadas de **divergências**.

Distância estatística de Wootters (Phys. Rev. D **23**, 357-362 (1981))

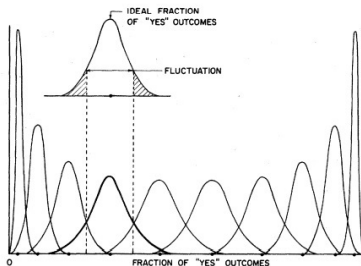
A distância estatística $d(p, p')$ entre duas probabilidades p e p' é definida por

$$d(p, p') = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#\{\text{máximo número de pontos distinguíveis em } n \text{ experimentos}\}}{\sqrt{n}}$$

sendo $p = (p_1, \dots, p_N)$, $p' = (p'_1, \dots, p'_N)$ e N o número de resultados possíveis.

Exemplo: $N = 2$ lançamento de uma moeda $p = (p_1, 1 - p_1)$ e $p' = (p_2, 1 - p_2)$

$$d(p, p') = \cos^{-1}(\sqrt{p_1 p_2} + \sqrt{(1 - p_1)(1 - p_2)}) \neq |p_1 - p_2|$$



p, p' são distinguíveis se para n grande as regiões de incerteza não se superpõem

$$\frac{\sqrt{n}}{2} \left[\sum_{i=1}^N \frac{(\delta p_i)^2}{p_i} \right]^{1/2} > 1, \quad \delta p_i = p_i - p'_i$$



todos os pontos estão igualmente espaçados

Gomez, I. S., Portesi M., Lamberti P. W., *Chaos* (2017)

Inspirados na distância estatística de Wootters exploramos analiticamente e numericamente a proposta de R. Johal (arXiv:chao-dyn/9804002):

$$d(x^A, x^B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\text{probabilidade de visitar } [x^A, x^B] \text{ depois de } n \text{ passos}\} =$$

$$= \left| \int_{x^A}^{x^B} \rho(x) dx \right| \quad \text{sendo } \rho(x) \text{ a densidade invariante do mapa } x_{n+1} = f(x_n)$$

Seja $\Gamma = [0, 1]$ o espaço de fase, dividimos ele em M subintervalos iguais e dado um $x_0 \in [0, 1]$, consideramos $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(f(x_0)), \dots, x_T = f^T(x_0)$. A fração ρ_i dos T estados que visitam o i -ésimo intervalo ($i = 1, \dots, M$) é

$$\rho_i = \frac{\#\{x_\tau \in [\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M}) : \tau = 0, 1, \dots, T\}}{T} \longrightarrow \rho(x_i) \quad \text{quando } T \gg M$$

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^M \rho_i \chi_{[\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M})}(x) \quad \text{densidade invariante numérica do mapa}$$

$$C(x) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^i \rho_j \chi_{[\frac{i-1}{M}, \frac{i}{M})}(x) \quad \text{cumulante numérica da densidade do mapa}$$

Resultados analíticos

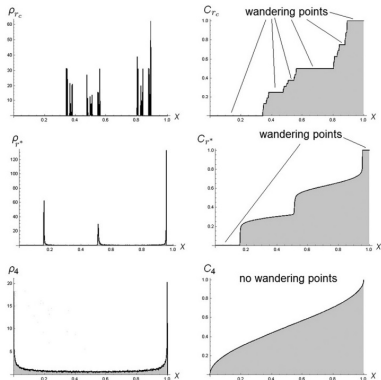
Teorema III.1 (Gomez-Portesi-Lamberti, Chaos, 2017): Seja a relação de equivalência $x^A \sim x^B \iff d(x^A, x^B) = 0$ e seja $\mu_\rho(A) = \int_A \rho(x) dx$ a medida invariante de ρ com $A \in [a, b]$. São equivalentes:

- $\rho(x) = 0$ em quase todo ponto (q.t.p.) de (x^A, x^B) .
- $\bar{x}^A = \bar{x}^B$.
- $d(x^A, x^B) = 0$.
- $C(x)$ é constante em $[x^A, x^B]$.
- Todo $x \in (x^A, x^B)$ é um ponto errante (wandering point).

O conjunto de pontos errantes indica os estados que sempre estão de passeio

O Teorema III.1 caracteriza os pontos errantes em mapas discretos em termos da métrica do mapa, ou equivalentemente da distribuição cumulante, o que pode ser conectado com o caráter **dissipativo** do sistema

Resultados numéricos



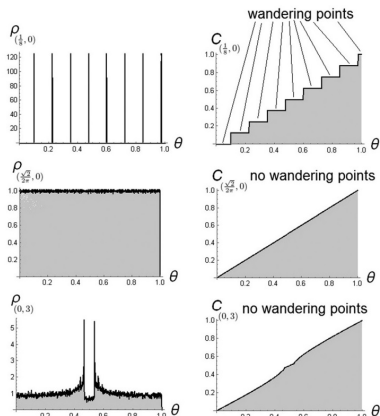
The logistic map

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$r = r_c = 3.56995$, the onset of chaos

$r^* = 3.82843$ the "Pomeau-Manneville scenario"

$r = 4$, the behavior is fully chaotic



The circle map

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$\Omega = \frac{1}{8}$ and $K = 0$ regular behavior

$\Omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ and $K = 0$ ergodic dynamics

$\Omega = 0$ and $K = 3$ fully chaotic

Métrica de Fisher: geometria da informação (GI)

Divergência de Kullback-Leibler (1951) entre duas distribuições p e q :

$$D_{KL}(p||q) = \sum_{i=1}^N p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \quad (\text{entropia relativa de } p \text{ em relação a } q)$$

Duas distribuições $p(\theta), p(\theta_0)$ infinitesimalmente próximas uma da outra, em que $\theta, \theta_0 \in \mathbb{R}^m$ são vetores de parâmetros de modo que $|\theta - \theta_0| \approx 0$, satisfazem

$$p(\theta) = p(\theta_0) + \sum_j \left. \frac{\partial p}{\partial \theta^j} \right|_{\theta_0} \Delta \theta^j \implies D_{KL}(p(\theta_0)||p(\theta)) = \frac{1}{2} \sum_{j,k} g_{jk}(\theta_0) \Delta \theta^j \Delta \theta^k + \mathcal{O}(\Delta \theta^3)$$

$$g_{jk}(\theta) = \int_X \frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta_j} \frac{\partial \ln p(x, \theta)}{\partial \theta_k} p(x, \theta) dx \quad (\text{métrica de Fisher})$$

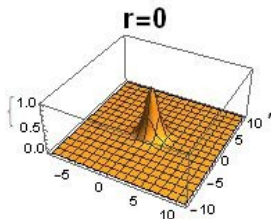
é um tensor métrico definido no espaço das distribuições de probabilidade parametrizadas \mathcal{M} , constituindo uma **variedade estatística**:

$$\mathcal{M} = \{p(x, \theta) : \theta \in \mathbb{R}^m, \int p(x, \theta) dx = 1, p \geq 0\}$$

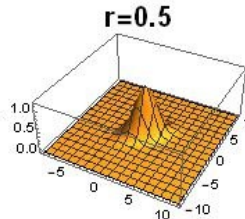
$$ds^2 = g_{jk}(\theta) d\theta^j d\theta^k$$

modelo Gaussiano bidimensional correlacionado de dimensionalidade mais baixa

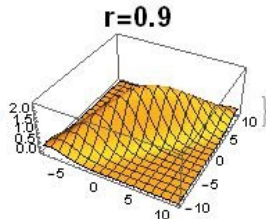
$$p(x, y; \mu_x, \sigma, r) = \frac{1}{2\pi\Sigma^2} \exp\left(-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma^2} + \frac{y^2\sigma^2}{\Sigma^4} - \frac{2r(x-\mu_x)y}{\Sigma^2} \right]\right)$$



$$R(r=0) = -0.5$$



$$R(r=0.5) = -0.375$$

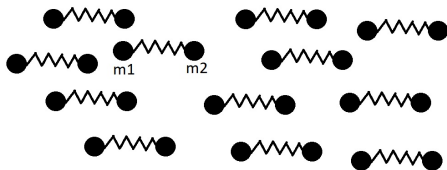


$$R(r=0.9) = -0.095$$

métrica de Fisher-Rao:
$$g_{ij}(\mu_x, \sigma) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2(1-r^2)} & 0 \\ 0 & \frac{4}{\sigma^2(1-r^2)} \end{pmatrix}$$

curvatura escalar:
$$R = R_{11}g^{11} + R_{22}g^{22} = -\frac{1}{2}(1-r^2) \quad , \quad -1 \leq r \leq 1$$

Curvatura escalar em sistemas Hamiltonianos (Gomez, I. S., Physica A **484**, 117-131, 2017)



densidade de probabilidade na posição do conjunto canônico dos osciladores

$$p\left(q_1, q_2; q_{10}, \sqrt{k_B T_0 (m_1 \omega_1^2)^{-1}}, r\right) = A\left(q_{10}, \sqrt{k_B T_0 (m_1 \omega_1^2)^{-1}}, r\right) \\ \times \exp\left\{-\beta \frac{k_B T_0}{2} \left\{ \frac{(q_1 - q_{10})^2}{k_B T_0 (m_1 \omega_1^2)^{-1}} + \frac{q_2^2 k_B T_0 (m_1 \omega_1^2)^{-1}}{\Sigma^4} - \frac{2r(q_1 - q_{10})q_2}{\Sigma^2} \right\}\right\}$$

$$\Sigma^2 = \frac{k_B T_0}{\sqrt{m_1 m_2 \omega_1 \omega_2}}$$



vínculo entre as variáveis do macro-espço e as variáveis macroscópicas

Mapeamento entre o modelo 2D correlacionado e a densidade canônica, temperatura versus curvatura escalar

$$(x, y) \longleftrightarrow (q_1, q_2)$$

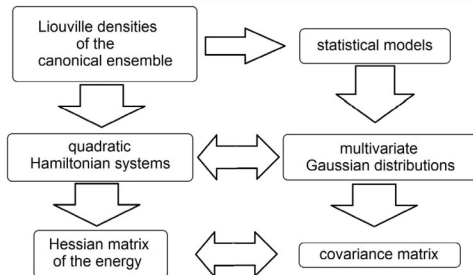
$$\mu_x \longleftrightarrow q_{10}$$

$$\sigma \longleftrightarrow \sqrt{k_B T_0 (m_1 \omega_1^2)^{-1}}$$

$$(1 - r^2)^{-1} \longleftrightarrow \beta k_B T_0 = \frac{T_0}{T} \quad \Rightarrow \quad 1 - r^2 = \frac{T}{T_0}$$

$$R = -\frac{T}{2T_0}$$

conexão entre a temperatura e a curvatura escalar da variedade estatística

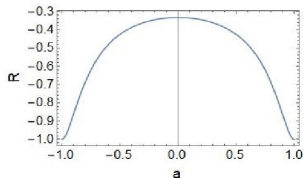


Losada M., Gomez I. S., Holik F., Physica A **532**, 121806 (2019)CURVATURA ESCALAR PARA UMA FAMÍLIA DE ESTADOS QUÂNTICOS

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$I_{\alpha\beta}(\psi) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} a^2 + 3b^2 & ab \\ ab & 3a^2 + 7b^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$R_\psi = \frac{-3 + 2a^2}{9 - 14a^2 + 6a^4}, \quad -1 \leq a \leq 1$$

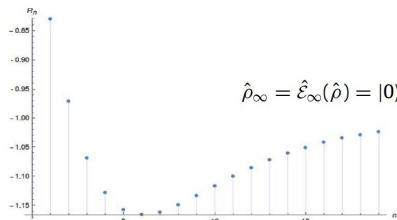
CURVATURA ESCALAR PARA UM CANAL QUÂNTICO TIPO "DUMPING"

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_\tau(\hat{\rho}) = \hat{A}_0 \hat{\rho} \hat{A}_0^\dagger + \hat{A}_1 \hat{\rho} \hat{A}_1^\dagger$$

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-p} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathcal{E}}_{n\tau}(\hat{\rho}) = \begin{pmatrix} \rho_{00} + \rho_{11}(1 - (1-p)^n) & (\sqrt{1-p})^n \rho_{01} \\ (\sqrt{1-p})^n \rho_{10} & (1-p)^n \rho_{11} \end{pmatrix}$$



$$\hat{\rho}_\infty = \hat{\mathcal{E}}_\infty(\hat{\rho}) = |0\rangle\langle 0|$$

Conteúdo

- 1 Teoria da informação
 - Preliminares
 - Distância estatística em mapas caóticos
 - Modelos estatísticos curvados em Hamiltonianos e estados quânticos
- 2 Estatística não extensiva, massa dependente da posição e álgebras deformadas**
 - Preliminares
 - Equação de Fokker-Planck com estruturas deformadas
 - Equação de Schrödinger com estruturas deformadas
- 3 Propostas em aberto/andamento
- 4 Conclusões

Estatística não extensiva: introdução

Possible Generalization of Boltzmann–Gibbs Statistics

Constantino Tsallis¹

Received November 12, 1987; revision received March 8, 1988

With the use of a quantity normally scaled in multifractals, a generalized form is postulated for entropy, namely $S_q \equiv k[1 - \sum_{i=1}^W p_i^q]/(q-1)$, where $q \in \mathbb{R}$ characterizes the generalization and $\{p_i\}$ are the probabilities associated with W (microscopic) configurations ($W \in \mathbb{N}$). The main properties associated with this entropy are established, particularly those corresponding to the microcanonical and canonical ensembles. The Boltzmann–Gibbs statistics is recovered as the $q \rightarrow 1$ limit.

ADITIVIDADE: uma entropia S é **aditiva** se para dois sistemas A, B independentes

$$S(A + B) = S(A) + S(B)$$

Porém, a entropia de Tsallis $S_q = \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q - 1}{1-q}$ satisfaz

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + \left(\frac{1-q}{k_B} \right) S_q(A)S_q(B)$$

EXTENSIVIDADE: Dados N subsistemas A_1, \dots, A_N , uma entropia S é **extensiva** se

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N} < \infty \quad S(N) \propto N \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty$$

Sistemas simples e sistemas complexos

Sistemas Simples: $W(N) \propto \mu^N$ ($\mu > 1$)

- correlações espaço-temporais de curto alcance
- processos Markovianos (memória curta), ruído aditivo
- caos forte (máximo expoente de Lyapunov positivo), ergodicidade
- equações de Fokker-Planck lineares/homogêneas, Gaussianas
- dependências/decaimentos exponenciais, entropia de Boltzmann-Gibbs

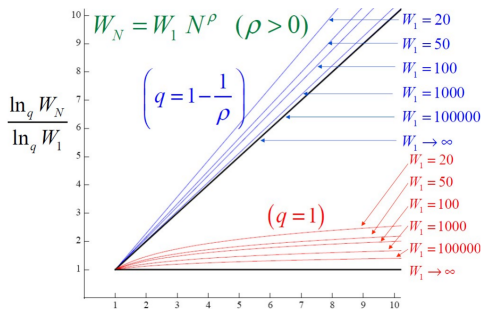
Sistemas Complexos: $W(N) \propto N^\rho$ ($\rho > 0$)

- correlações espaço-temporais de longo alcance
- processos não Markovianos (memória longa), ruídos aditivos e multiplicativos
- caos fraco (máximo expoente de Lyapunov nulo), não ergodicidade
- equações de Fokker-Planck não lineares/inhomogêneas, q-Gaussianas
- dependências/decaimentos q-exponenciais (leis de potência), entropia S_q

Sistemas	entropia S_{BG}	entropia S_q ($q < 1$)
interações de curto alcance	EXTENSIVA	NÃO EXTENSIVA
interações de longo alcance	NÃO EXTENSIVA	EXTENSIVA

$$q\text{-logaritmo: } \ln_q x \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1-q} \quad (x > 0; \ln_1 x = \ln x)$$

$$q\text{-exponencial: } e_q^x \equiv [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} \quad (e_1^x = e^x)$$



E.M.F. Curado and C. T. (2008)

Estatística não extensiva e estruturas associadas

Não aditividade : $S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + \left(\frac{1-q}{k_B}\right) S_q(A)S_q(B)$

q-soma: $x \oplus_q y := x + y + (1-q)xy \rightarrow x + y$ quando $q \rightarrow 0$

q-produto: $x \otimes_q y := [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]^{1/(1-q)} \rightarrow xy$ quando $q \rightarrow 0$

L. Nivanen *et al.*, *RMP* **52**, 437-444 (2003) - E. P. Borges, *Phys. A* **340**, 95-101 (2004)

q-álgebra $(\oplus_q, \ominus_q, \otimes_q, \oslash_q)$ e **q-derivada** $D_q f(x) = (1 + (1-q)x)df/dx$

Mapeamento entre oscilador harmônico com derivada deformada e oscilador de Morse mediante a transformação canônica $\eta = \frac{\ln(1+\gamma x)}{\gamma}$ ($\gamma = 1 - q$)

$$\text{OH} : i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -(1+\gamma x)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) - \gamma(1+\gamma x) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi(x, t)$$



$$\text{OM} : i\hbar \frac{\partial \phi(\eta, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \phi(\eta, t) + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} (e^{\gamma\eta} - 1)^2 \phi(\eta, t) \quad , \quad \phi(\eta, t) = \psi(x(\eta), t)$$

correspondência biunívoca entre massa dependente da posição e derivada deformada

$$T_g = \frac{g(x)}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iff m(x) = \frac{m_0}{g(x)} \quad , \quad g(x) = (1 + \gamma x)^2 \quad (\text{q-álgebra})$$

PHYSICAL REVIEW E **102**, 062105 (2020)

Deformed Fokker-Planck equation: Inhomogeneous medium with a position-dependent mass

Bruno G. da Costa ^{1,*}, Ignacio S. Gomez ^{2,†} and Ernesto P. Borges ^{2,‡}

¹*Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Rua Maria Luíza de Araújo Gomes Cabral s/n, 56316-686 Petrolina, Pernambuco, Brazil*

²*Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, R. Barão de Jeremoabo s/n, 40170-115 Salvador, Bahia, Brazil*



(Received 20 April 2020; revised 2 July 2020; accepted 30 October 2020; published 2 December 2020)

We present the Fokker-Planck equation (FPE) for an inhomogeneous medium with a position-dependent mass particle by making use of the Langevin equation, in the context of a generalized deformed derivative for an arbitrary deformation space where the linear (nonlinear) character of the FPE is associated with the employed deformed linear (nonlinear) derivative. The FPE for an inhomogeneous medium with a position-dependent diffusion coefficient is equivalent to a deformed FPE within a deformed space, described by generalized derivatives, and constant diffusion coefficient. The deformed FPE is consistent with the diffusion equation for inhomogeneous media when the temperature and the mobility have the same position-dependent functional form as well as with the nonlinear Langevin approach. The deformed version of the H -theorem permits to express the Boltzmann-Gibbs entropic functional as a sum of two contributions, one from the particles and the other from the inhomogeneous medium. The formalism is illustrated with the infinite square well and the confining potential with linear drift coefficient. Connections between superstatistics and position-dependent Langevin equations are also discussed.

Lagrangiana com massa dependente da posição $m(x)$ e força aleatória $R(t)$

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}m(x)\dot{x}^2 - U(x, t) \quad , \quad U(x, t) = V(x) - xR(t)$$

equação de Euler-Lagrange com função de Rayleigh \mathcal{Q} de dissipação

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \dot{x}} = 0 \quad , \quad \mathcal{Q} = \frac{1}{2}m(x)\lambda(x)\dot{x}^2 \quad , \quad \lambda(x) = \frac{\lambda_0}{\kappa(x)} = \lambda_0 \sqrt{\frac{m_0}{m(x)}}$$

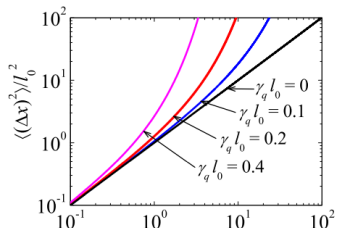
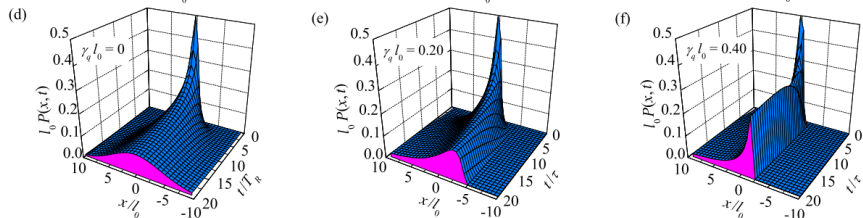
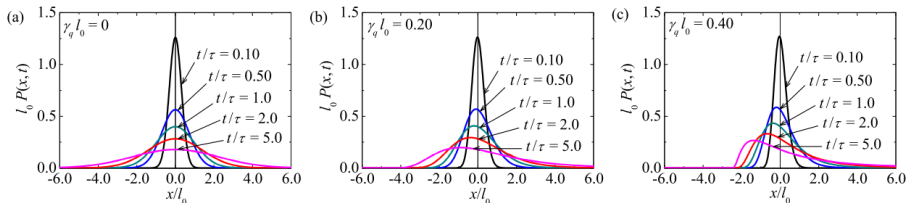
equação de movimento

$$m(x)\ddot{x} + \frac{1}{2}m'(x)\dot{x}^2 = -m(x)\lambda(x)\dot{x} + F(x) + R(t) \quad , \quad F(x) = -\frac{dV}{dx}$$

limite superamortecido (equação de Langevin) \iff FPE linear deformada

$$\dot{x} = \frac{F(x) + R(t)}{m(x)\lambda(x)} \iff \frac{\partial \mathcal{P}_q(x, t)}{\partial t} = -D_q[A(x)\mathcal{P}_q(x, t)] + \frac{\Gamma}{2}D_q^2\mathcal{P}_q(x, t)$$

$$\frac{\mathcal{P}_q(x, t)}{1 + \gamma x} = P(x, t) \iff \int \mathcal{P}_q(x, t) dx_q = \int P(x, t) dx = 1 \quad , \quad x_q = \frac{\ln(1 + \gamma x)}{\gamma}$$



$$m(x) = \frac{m_0}{(1 + \gamma_q x)^2}$$

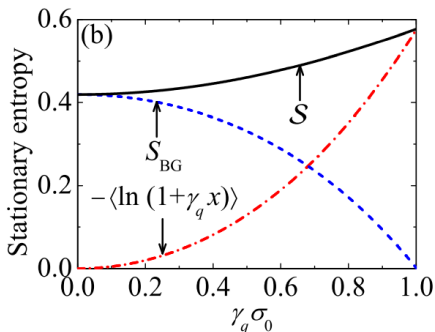
hyper-difusão exponencial

$$\tau = 1/(\gamma_q^2 \Gamma)$$

entropia deformada e difusão não homogênea van Kampen

$$\mathcal{S} = - \int \mathcal{P}_q(x, t) \ln \mathcal{P}_q(x, t) dx_q = - \int P(x, t) \ln \left[\frac{P(x, t)}{(1 + \gamma x)^{-1}} \right] dx =$$

$$= S_{\text{BG}} - \langle \ln(1 + \gamma x) \rangle = \text{entropia de Boltzmann-Gibbs} + \text{meio não homogêneo}$$



$$\mathbf{vK} : \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} [\mu(x) V'(x) P] + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \mu(x) \frac{\partial}{\partial x} [T(x) V'(x) P] \right\}, \quad \frac{T(x)}{T_0} = \frac{\mu(x)}{\mu_0} = \sqrt{\frac{m_0}{m(x)}}$$

entropias de grupo - Tempesta, *Phys. Rev. E* **84**, 2011

$S : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}$ junto com uma função contínua $\Phi(x, y)$ é uma **entropia de grupo** se:

- (I) the continuity of the functional $S_n[p]$,
- (II) the maximum of S_n is attained by the uniform distribution,
- (III) S_n is expandable to S_{n+1} by adding events of zero probability,
- (C1) *Composability*: If A and B are two statistically independent systems provided with probability distribution $\{p_i\}_{i=1}^n$ and $\{q_j\}_{j=1}^m$ then $S(A \cup B) = \Phi(S(A), S(B))$.
- (C2) *Symmetry*: $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$.
- (C3) *Associativity*: $\Phi(x, \Phi(y, z)) = \Phi(\Phi(x, y), z)$.
- (C4) *Null-composability*: $\Phi(x, 0) = x$.

Grupo formal de Lazard (Bochner, *S. Ann. Math.* **47**, 192–201, 1946)

$\Phi(x, y) = G(G^{-1}(x) + G^{-1}(y)) = x \oplus_G y = x + y +$ potencias maiores

$$G(t) = t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{t^{k+1}}{k+1} \quad , \quad \log_G(x) = G(\ln x) \quad , \quad \exp_G(x) = \exp(G^{-1}(x))$$

classes de entropias de grupo (Boltzmann-Gibbs, Tsallis e Kaniadakis)

$$G_{BG}(t) = t \quad , \quad G_q(t) = \frac{\exp((1-q)t) - 1}{1-q} \quad , \quad G_{\kappa}(t) = \frac{\exp(\kappa t) - \exp(-\kappa t)}{2\kappa}$$

$$\begin{aligned} \text{G-soma: } & x \oplus_G y := G(G^{-1}(x) + G^{-1}(y)) \longrightarrow x + y \quad \text{quando } G(t) \rightarrow t \\ \text{G-produto: } & x \otimes_G y := \exp_G(\log_G(x) + \log_G(y)) \longrightarrow xy \quad \text{quando } G(t) \rightarrow t \\ \text{G-álgebra : } & (\oplus_G, \ominus_G, \otimes_G, \oslash_G) \text{ e } \mathbf{G}\text{-derivada : } D_G f(x) = \frac{1}{(G^{-1})'(x)} \frac{df}{dx} \end{aligned}$$

Letters in Mathematical Physics (2021) 111:43
<https://doi.org/10.1007/s11005-021-01387-0>

ORIGINAL PAPER



Algebraic structures and position-dependent mass Schrödinger equation from group entropy theory

Ignacio S. Gomez¹ · Ernesto P. Borges¹

Received: 24 February 2020 / Revised: 11 February 2021 / Accepted: 18 March 2021
 © The Author(s), under exclusive licence to Springer Nature B.V. 2021

Abstract

Based on the group entropy theory, in this work, we generalize the algebra of real numbers (referred to as G -algebra) along with its associated calculus, thus obtaining the algebraic structures corresponding to the Tsallis and the κ -statistics. From a G -deformed translation operator, we obtain its associated Schrödinger equation, that corresponds to a particle with an effective position-dependent mass determined by the G -algebra. The q -deformed (standard) Schrödinger equation results in a special case for the Tsallis (Boltzmann–Gibbs) group class. We illustrate the results with the one-dimensional potential well for the κ and the Tsallis classes and we obtain a family of potentials associated with the group entropy classes by first principles.

Quantum structure

Conjugated operators \hat{x} , \hat{p}

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar\hat{1}$$

Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$$

G-quantum structure

G-deformed operators \hat{x}_G , \hat{p}_G

$$\hat{x}_G = G^{-1}(\hat{x})$$

$$\hat{p}_G = \frac{1}{2}\{G'(G^{-1}(\hat{x})), \hat{p}\}$$

$$[\hat{x}_G, \hat{p}_G] = i\hbar\hat{1}$$

G-Schrödinger equation

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_G}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_0} D_G^2 \Phi_G + V\Phi_G$$

The G-eigenfunctions are

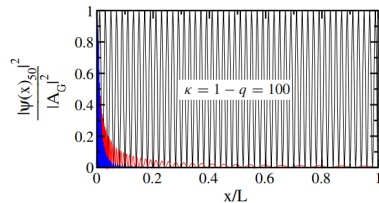
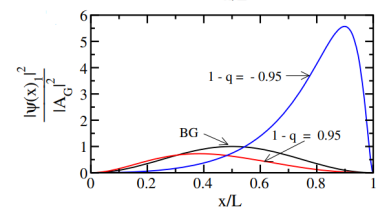
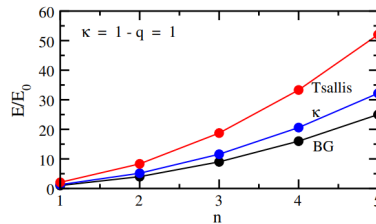
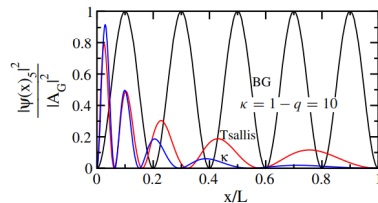
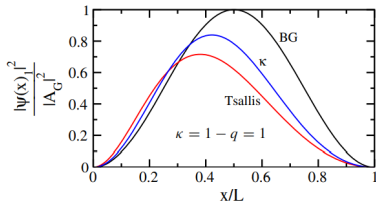
$$\Psi_{G,n}(x_G) = \begin{cases} A_{G,n} \sin(k_{G,n}x_G) & \text{iff } 0 \leq x_G \leq L_G \\ 0 & \text{iff } x_G > L_G \end{cases}$$

$$E_{G,n} = \hbar^2(k_{G,n})^2/2m_0 = \hbar^2 n^2 \pi^2 / 2m_0 G^{-1}(L)^2,$$

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{G^{-1}(L)G'(G^{-1}(x))}} \sin(n\pi G^{-1}(x)/G^{-1}(L)) & \text{iff } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{iff } x > L. \end{cases}$$

$$0, G\left(\frac{1}{n}G^{-1}(L)\right), G\left(\frac{2}{n}G^{-1}(L)\right), \dots, G\left(\frac{n-1}{n}G^{-1}(L)\right), L$$

$$0, \oplus_G^1 G(L_G/n), \oplus_G^2 G(L_G/n), \dots, \oplus_G^{n-1} G(L_G/n), \oplus_G^n G(L_G/n)$$



Conteúdo

- 1 Teoria da informação
 - Preliminares
 - Distância estatística em mapas caóticos
 - Modelos estatísticos curvados em Hamiltonianos e estados quânticos
- 2 Estatística não extensiva, massa dependente da posição e álgebras deformadas
 - Preliminares
 - Equação de Fokker-Planck com estruturas deformadas
 - Equação de Schrödinger com estruturas deformadas
- 3 Propostas em aberto/andamento
- 4 Conclusões

Propostas em aberto/andamento

1) **Distâncias estatísticas em mapas bidimensionais** utilizando a densidade invariante $\rho(x, y)$: Como definir $C(x, y)$?

$$x_{n+1} = x_n + K \sin x_n \quad (\text{mapa de Chirikov})$$

$$p_{n+1} = x_n + p_n$$

2) **Estudar a curvatura escalar do oscilador quântico clássico** (em aberto)

$$H = \frac{p^2}{2m} + bx^4 + kx^2$$

3) **Equações mestras com estruturas deformadas** (enviado à *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* e parcialmente aceito)

$$\mathcal{P}(x_\kappa, t + \Delta t) = p\mathcal{P}(x_\kappa + (+a)_\kappa, t) + (1 - p)\mathcal{P}(x_\kappa + (-a)_\kappa, t)$$

4) **Estudar equações relativísticas (Dirac, KG, DKP) com entropias de grupo** (em aberto)

Conteúdo

- 1 Teoria da informação
 - Preliminares
 - Distância estatística em mapas caóticos
 - Modelos estatísticos curvados em Hamiltonianos e estados quânticos
- 2 Estatística não extensiva, massa dependente da posição e álgebras deformadas
 - Preliminares
 - Equação de Fokker-Planck com estruturas deformadas
 - Equação de Schrödinger com estruturas deformadas
- 3 Propostas em aberto/andamento
- 4 Conclusões

Conclusões

- Distâncias estatísticas utilizadas em mapas discretos permitem distinguir entre regimes regulares e caóticos
- A curvatura escalar é uma grandeza geométrica que pode caracterizar transições de fase e famílias de estados quânticos
- Derivadas lineares deformadas, massas dependentes da posição e não homogeneidades são conceitos intimamente ligados
- As estruturas deformadas fornecem um formalismo para generalizar conceitos físicos/matemáticos em que os parâmetros de deformação caracterizam de maneira contínua às correções

CAOS CLÁSSICO E QUÂNTICO



Mario A. Castagnino
(Instituto de Física de Rosario - Argentina)



Olimpia Lombardi
(Universidad de Buenos Aires - Argentina)

MECÂNICA ESTATÍSTICA ESTRUTURAS ALGÉBRICAS GENERALIZADAS SISTEMAS PDM



Mariela Portesi
(Universidad Nacional de La Plata - Argentina)



Ernesto P. Borges
(Universidade Federal da Bahia)

MECÂNICA QUÂNTICA



Décio Krause
(Universidade Federal de Santa Catarina)



Pedro W. Lamberti
(Universidad Nacional de Córdoba - Argentina)



Bruno G. da Costa
(Instituto Federal do Sertão Pernambucano)



Omar Mustafa
(Eastern Mediterranean University)

SISTEMAS RELATIVÍSTICOS



Marcelo Losada
(Universidad Nacional de Córdoba - Argentina)



Federico Holik
(Instituto de Física La Plata - Argentina)



Sebastián Fortin
(Universidad de Buenos Aires - Argentina)



Esdras S. Santos
(Universidade Federal da Bahia)

Obrigado Gracias

E-mail: ignacio.gomez@uesb.edu.br