

Passeio aleatório deformado: supressão da aleatoriedade e quebra da homogeneidade

Prof. Dr. Ignacio Sebastián Gomez
Departamento de Ciências Exatas e Naturais - Área Física - UESB

IX CICLO DE SEMINÁRIOS DO CURSO DE FÍSICA DA UESB DE ITAPETINGA 2022

Itapetinga, 03 de Maio de 2023



Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

Conteúdo

- 1 Passeio aleatório
 - Preliminares
- 2 Passeio aleatório deformado
 - Estatística não extensiva: motivações
 - Deformando o RW
 - Equação mestra deformada e distribuição de probabilidade deformada
- 3 Conclusões e perspectivas

Conteúdo

- 1 Passeio aleatório
 - Preliminares
- 2 Passeio aleatório deformado
 - Estatística não extensiva: motivações
 - Deformando o RW
 - Equação mestra deformada e distribuição de probabilidade deformada
- 3 Conclusões e perspectivas

Passeio aleatório: um pouco de história

O poema *De rerum natura* (Sobre a natureza das coisas), obra didática sobre os princípios e a filosofia do *epicurismo* do filósofo e poeta romano **Tito Lucrecio Caro** (94 a.C. - 50 a. C.) cita:

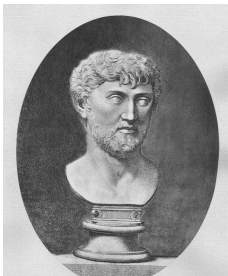
“Os átomos movem-se num infinito vazio.

O universo é composto de átomos e vazio, nada mais.

Devido a sermos compostos de uma sopa de átomos em constante movimento.

As formas de vida neste mundo e nos outros estão em constante movimento, incrementando a potência de umas formas e diminuindo a de outras.

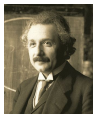
Os sentimentos percebem as colisões macroscópicas e interações dos corpos”



Movimento Browniano



Em 1827 o biólogo escocês **Robert Brown** observou que partículas encontradas em grãos de pólen na água moviam-se através da água, com movimentos por “vontade própria”

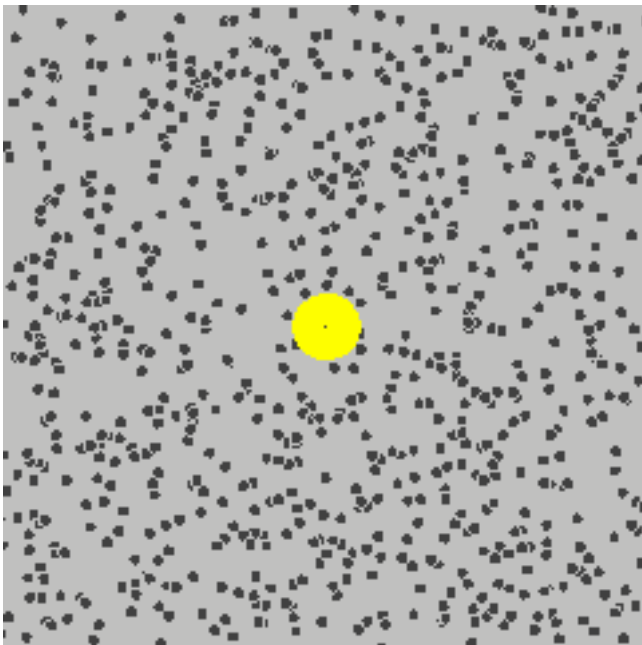


Em 1905, **Albert Einstein** em sua tese de doutoramento publicou a primeira teoria do movimento Browniano, obtendo $\Gamma = RT/(6\pi a\eta N_A)$ para o coeficiente de difusão



Em 1908, o físico francês Paul Langevin definiu o movimento Browniano

$$\frac{dv}{dt} = \eta v + \xi(t) \quad , \quad \eta = \text{coeficiente de viscosidade} \quad , \quad \xi(t) = \text{força aleatória}$$



Descrições determinística e probabilística

Suponhamos a dinâmica discreta de um sistema em uma dimensão, em que $X_0, X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ representam as posições de uma partícula nos instantes $t = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Isto, por exemplo, permite modelar o movimento Browniano

descrição determinística (eq. Hamilton) \implies descrição probabilística (eq. mestra)

MECÂNICA DA PARTÍCULA \implies MECANICA ESTATÍSTICA

$(x_1(t), \dots, x_N(t), p_1(t), \dots, p_N(t)) \implies P(x, t)$ distribuição do sistema

em que $P(x, t)$ é a densidade de probabilidade do sistema estar na posição x no instante t

Definição de passeio aleatório clássico (clássico)

Probabilidade de dar um passo i -ésimo $X_i = 1$ ou $X_i = -1$:

$$P(X_i = +1) = p \quad , \quad P(X_i = -1) = 1 - p$$

O valor esperado (média) e a variância no i -ésimo passo são

$$E(X_i) = (+1)p + (-1)(1 - p) = 2p - 1$$

$$V(X_i) = (1 - (2p - 1))^2 p + (-1 - (2p - 1))^2 (1 - p) = 4p(1 - p)$$

Vemos que para o caso particular de um RW simétrico ou padrão ($p = 1/2$) temos

$$P(X_i = \pm 1) = 1/2 \quad , \quad E(X_i) = 0 \quad , \quad V(X_i) = 1$$

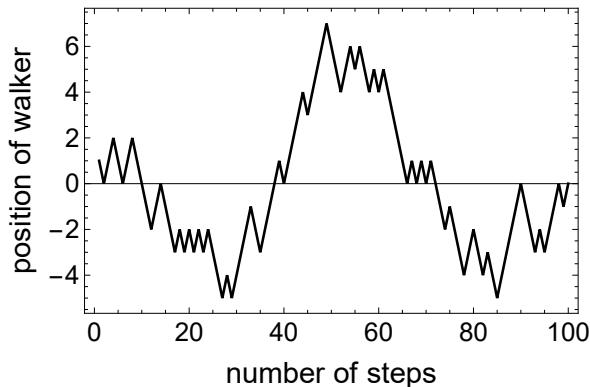
Triângulo de Pascal para $p = 1/2$ e $n = 5$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(S_0 = k)$						0					
$2P(S_1 = k)$					1		1				
$2^2P(S_2 = k)$				1		2		1			
$2^3P(S_3 = k)$			1		3		3		1		
$2^4P(S_4 = k)$		1		4		6		4		1	
$2^5P(S_5 = k)$	1		5		10		10		5		1

Trajетórias do RW - Homogeneidade

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{posição depois de } n \text{ passos})$$

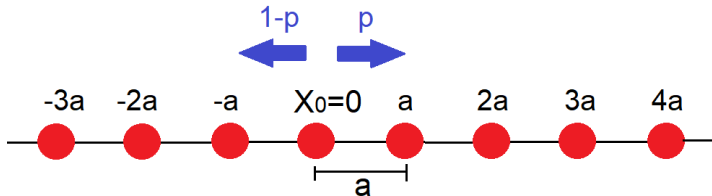
código Mathematica: `ListLinePlot[Accumulate[RandomChoice[-1, 1, 100]], Frame → True, FrameLabel → Style["number of steps", FontSize → 18, Black], Style["position of walker", FontSize → 18, Black], LabelStyle → Directive[Black, FontSize → 16], PlotStyle → Black]`



Conexão do passeio aleatório com a equação de difusão

A equação mestra para $P(x, t)$ em uma rede unidimensional de parâmetro a é

$$P(x, t + \Delta t) = pP(x + a, t) + (1 - p)P(x - a, t)$$



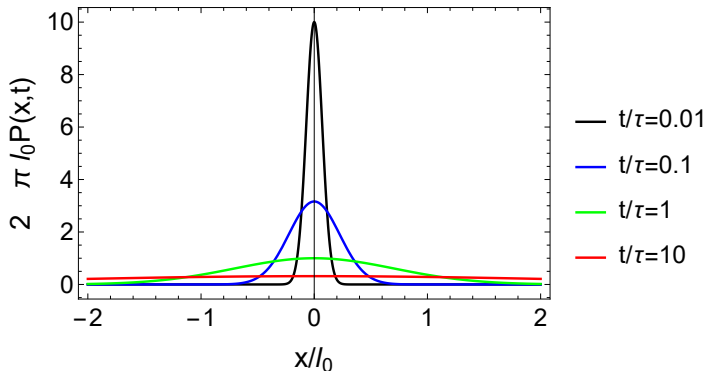
para $p = 1/2$ no limite $a \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$ a partir das aproximações

$$P(x \pm a, t) \approx P(x, t) \pm a \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad , \quad P(x, t + \Delta t) \approx P(x, t) + \Delta t \frac{\partial P}{\partial t}$$

obtem-se a **equação de difusão** (Fokker-Planck equation, FPE) de $P(x, t)$

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} \quad , \quad \Gamma = \frac{a^2}{2\Delta t}$$

Solução da equação de difusão (caso livre)



$$P(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma t}} e^{-\frac{x^2}{2\Gamma t}} \quad , \quad \langle x(t) \rangle = 0 \quad , \quad \langle x(t)^2 \rangle = \Gamma t \quad , \quad \tau = \frac{2\Gamma}{l_0^2}$$

Conteúdo

- 1 Passeio aleatório
 - Preliminares
- 2 Passeio aleatório deformado
 - Estatística não extensiva: motivações
 - Deformando o RW
 - Equação mestra deformada e distribuição de probabilidade deformada
- 3 Conclusões e perspectivas

Estatística não extensiva: introdução

Possible Generalization of Boltzmann–Gibbs Statistics

Constantino Tsallis¹

Received November 12, 1987; revision received March 8, 1988

With the use of a quantity normally scaled in multifractals, a generalized form is postulated for entropy, namely $S_q \equiv k[1 - \sum_{i=1}^W p_i^q]/(q-1)$, where $q \in \mathbb{R}$ characterizes the generalization and $\{p_i\}$ are the probabilities associated with W (microscopic) configurations ($W \in \mathbb{N}$). The main properties associated with this entropy are established, particularly those corresponding to the microcanonical and canonical ensembles. The Boltzmann–Gibbs statistics is recovered as the $q \rightarrow 1$ limit.

ADITIVIDADE: uma entropia S é **aditiva** se para dois sistemas A, B independentes

$$S(A + B) = S(A) + S(B)$$

Porém, a entropia de tsallis $S_q = \frac{\sum_{i=1}^W p_i^q - 1}{1-q}$ satisfaz

$$S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + \left(\frac{1-q}{k_B} \right) S_q(A)S_q(B)$$

EXTENSIVIDADE: Dados N subsistemas A_1, \dots, A_N , uma entropia S é **extensiva** se

$$0 < \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S(N)}{N} < \infty \quad S(N) \propto N \quad \text{quando} \quad N \rightarrow \infty$$

Estatística não extensiva e estruturas associadas

Não aditividade : $S_q(A + B) = S_q(A) + S_q(B) + \left(\frac{1 - q}{k_B}\right) S_q(A)S_q(B)$

q-soma: $x \oplus_q y := x + y + (1 - q)xy \rightarrow x + y$ quando $q \rightarrow 0$

q-produto: $x \otimes_q y := [x^{1-q} + y^{1-q} - 1]^{1/(1-q)} \rightarrow xy$ quando $q \rightarrow 0$

L. Nivanen *et al.*, *RMP* **52**, 437-444 (2003) - E. P. Borges, *Phys. A* **340**, 95-101 (2004)

q-álgebra $(\oplus_q, \ominus_q, \otimes_q, \oslash_q)$ e **q-derivada** $D_q f(x) = (1 + (1 - q)x)df/dx$

Mapeamento entre oscilador harmônico com derivada deformada e oscilador de Morse mediante a transformação canônica $\eta = \frac{\ln(1+\gamma x)}{\gamma}$ ($\gamma = 1 - q$)

$$\text{OH} : i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -(1 + \gamma x)^2 \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) - \gamma(1 + \gamma x) \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \psi(x, t)$$


$$\text{OM} : i\hbar \frac{\partial \phi(\eta, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \phi(\eta, t) + \frac{m\omega^2}{2\gamma^2} (e^{\gamma\eta} - 1)^2 \phi(\eta, t) \quad , \quad \phi(\eta, t) = \psi(x(\eta), t)$$

correspondência biunívoca entre massa dependente da posição e derivada deformada

$$T_g = \frac{g(x)}{2m_0} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \iff m(x) = \frac{m_0}{g(x)} \quad , \quad g(x) = (1 + \gamma x)^2 \quad (\text{q-álgebra})$$

PHYSICAL REVIEW E **102**, 062105 (2020)

Deformed Fokker-Planck equation: Inhomogeneous medium with a position-dependent mass

Bruno G. da Costa ^{1,*}, Ignacio S. Gomez ^{2,†} and Ernesto P. Borges ^{2,‡}

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano, Rua Maria Luíza de Araújo Gomes Cabral s/n, 56316-686 Petrolina, Pernambuco, Brazil

²Instituto de Física, Universidade Federal da Bahia, R. Barão de Jeremoabo s/n, 40170-115 Salvador, Bahia, Brazil




(Received 20 April 2020; revised 2 July 2020; accepted 30 October 2020; published 2 December 2020)

We present the Fokker-Planck equation (FPE) for an inhomogeneous medium with a position-dependent mass particle by making use of the Langevin equation, in the context of a generalized deformed derivative for an arbitrary deformation space where the linear (nonlinear) character of the FPE is associated with the employed deformed linear (nonlinear) derivative. The FPE for an inhomogeneous medium with a position-dependent diffusion coefficient is equivalent to a deformed FPE within a deformed space, described by generalized derivatives, and constant diffusion coefficient. The deformed FPE is consistent with the diffusion equation for inhomogeneous media when the temperature and the mobility have the same position-dependent functional form as well as with the nonlinear Langevin approach. The deformed version of the H -theorem permits to express the Boltzmann-Gibbs entropic functional as a sum of two contributions, one from the particles and the other from the inhomogeneous medium. The formalism is illustrated with the infinite square well and the confining potential with linear drift coefficient. Connections between superstatistics and position-dependent Langevin equations are also discussed.

Deformando o RW (PRE, 2023)

PHYSICAL REVIEW E **107**, 034113 (2023)

Deformed random walk: Suppression of randomness and inhomogeneous diffusion

Ignacio S. Gomez *

*Departamento de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia,
Rodovia BR 415, km 03, s/n, Itapetinga, BA 45700-000, Brazil*



(Received 5 September 2022; accepted 17 February 2023; published 8 March 2023)

We study a generalization of the random walk (RW) based on a deformed translation of the unitary step, inherited by the q algebra, a mathematical structure underlying nonextensive statistics. The RW with deformed step implies an associated deformed random walk (DRW) provided with a deformed Pascal triangle along with an inhomogeneous diffusion. The paths of the RW in deformed space are divergent, while those corresponding to the DRW converge to a fixed point. Standard random walk is recovered for $q \rightarrow 1$ and a suppression of randomness is manifested for the DRW with $-1 < \gamma_q < 1$ and $\gamma_q = 1 - q$. The passage to the continuum of the master equation associated to the DRW led to a van Kampen inhomogeneous diffusion equation when the mobility and the temperature are proportional to $1 + \gamma_q x$, and provided with an exponential hyperdiffusion that exhibits a localization of the particle at $x = -1/\gamma_q$ consistent with the fixed point of the DRW. Complementarily, a comparison with the Plastino-Plastino Fokker-Planck equation is discussed. The two-dimensional case is also studied, by obtaining a 2D deformed random walk and its associated deformed 2D Fokker-Planck equation, which give place to a convergence of the 2D paths for $-1 < \gamma_{q_1}, \gamma_{q_2} < 1$ and a diffusion with inhomogeneities controlled by two deformation parameters $\gamma_{q_1}, \gamma_{q_2}$ in the directions x and y . In both the one-dimensional and the two-dimensional cases, the transformation $\gamma_q \rightarrow -\gamma_q$ implies a change of sign of the corresponding limits of the random walk paths, as a property of the deformation employed.

DOI: [10.1103/PhysRevE.107.034113](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.107.034113)

Passeio aleatório no espaço deformado

Probabilidade de dar um passo i -ésimo $(X_i)_q = (+1)_q$ ou $(X_i)_q = (-1)_q$ no espaço deformado x_q :

$$P((X_i)_q = (+1)_q) = p \quad , \quad P((X_i)_q = (-1)_q) = 1 - p$$

sendo

$$(\pm 1)_q = \frac{1}{\gamma_q} \ln(1 \pm \gamma_q) \quad , \quad x_q = \frac{1}{\gamma_q} \ln(1 + \gamma_q x)$$

A posição deformada $(S_n)_q$ definida por

$$(S_n)_q = (X_1)_q + (X_2)_q + \dots + (X_n)_q = \sum_{i=1}^n (X_i)_q$$

Daqui surge a pergunta: **Qual é a estrutura do passeio aleatório X_i correspondente ao passeio aleatório deformado $(X_i)_q$?**

$$(X_i)_q \mapsto X_i \quad , \quad x_q = \frac{1}{\gamma_q} \ln(1 + \gamma_q x) \mapsto x$$

Estrutura do passeio aleatório no espaço padrão x

Propriedade: Dados x, y números reais, a q -soma $x \oplus_q y = x + y + \gamma_q xy$ satisfaz

$$x_q + y_q = (x \oplus_q y)_q$$

Logo,

$$(S_n)_q = (X_1)_q + (X_2)_q + \dots + (X_n)_q \implies S_n = X_1 \oplus_q X_2 \oplus_q \dots \oplus_q X_n$$

sendo

$$S_n = X_1 \oplus_q X_2 \oplus_q \dots \oplus_q X_n = \frac{e^{\gamma_q(\sum_{i=1}^n (X_i)_q)} - 1}{\gamma_q}$$

$$S_1 = X_1$$

$$S_2 = X_1 + X_2 + \gamma_q X_1 X_2$$

$$\dots = \dots$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i + \gamma_q \sum_{i<j}^n X_i X_j + \gamma_q^2 \sum_{i<j<k}^n X_i X_j X_k + \dots$$

O parâmetro de deformação γ_q apresenta-se como correções perturbativas γ_q^i

Triângulos de Pascal RW e DRW

Triângulo de Pascal RW com $p = 1/2$ e $n = 5$

k	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P(S_0 = k)$						0					
$2P(S_1 = k)$					1		1				
$2^2P(S_2 = k)$				1		2		1			
$2^3P(S_3 = k)$			1		3		3		1		
$2^4P(S_4 = k)$		1		4		6		4		1	
$2^5P(S_5 = k)$	1		5		10		10		5		1

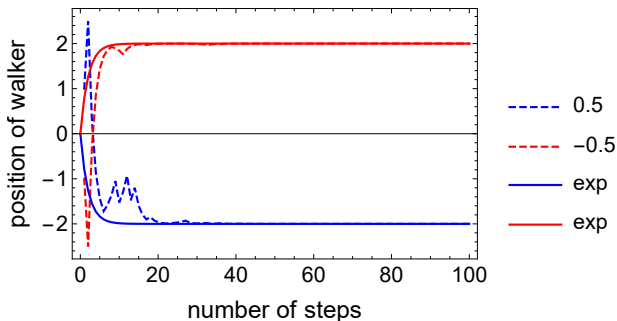
Triângulo de Pascal DRW com $p = 1/2$, $n = 5$ e $\gamma_q = 1/2$

			0			
		-1		1		
		-1.5 (1)	-0.5 (2)	2.5 (1)		
	-1.7 (1)	-1.2 (3)		0.2 (3)	5 (1)	
	-1.9 (1)	-1.6 (4)	-0.9 (6)	1.4 (4)	8.1 (1)	
-1.9 (1)	-1.8 (5)	-1.4 (10)		-0.3 (10)	3.1 (5)	13.2 (1)

Trajatórias do DRW - Inomogeneidade

$$S_n = X_1 \oplus_q X_2 \oplus_q \dots \oplus_q X_n = \frac{e^{\gamma_q (\sum_{i=1}^n (X_i)_q)} - 1}{\gamma_q} \quad (\text{posição depois de } n \text{ passos})$$

código Mathematica: `ListLinePlot[f[Accumulate[RandomChoice[g[-1], g[1], 100]]], k[Accumulate[RandomChoice[h[-1], h[1], 100]]], Table[k, 2*(Exp[-(0.5) k] - 1), k, 0, 100], Table[k, -2*(Exp[-(0.5) k] - 1), k, 0, 100], PlotStyle -> Dashed, Blue, Dashed, Red, Blue, Red, Frame -> True, FrameLabel -> Style["number of steps", FontSize -> 18, Black], Style["position of walker", FontSize -> 18, Black], LabelStyle -> Directive[Black, FontSize -> 16], PlotLegends -> {"0.5", "-0.5", "exp", "exp"}]`



Teorema de convergência para DRW

Intuitivamente, vemos que as trajetórias do passeio aleatório deformado satisfazem assintoticamente

$$\frac{dX}{dt} \approx 1 - |\gamma_q|X \quad , \quad X(0) = 0$$

cuja solução $X(t) = (e^{-|\gamma_q|t} - 1)/\gamma_q$ é observada já após $n=100$ passos

Theorem: (convergência unidimensional do DRW)

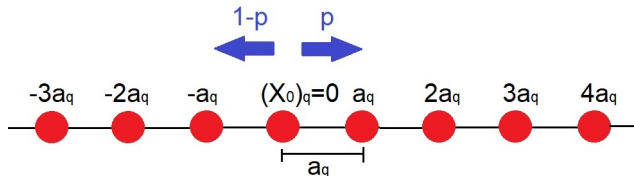
Let $f_+, f_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be the functions $f_+(x) = x \oplus_q 1 = x(1 + \gamma_q) + 1$ and $f_-(x) = x \oplus_q (-1) = x(1 - \gamma_q) - 1$. Let X_n be the position of the walker at instant $t = n$. Then,

- (i) $X_{n+1} = f_+(X_n)$ or $X_{n+1} = f_-(X_n)$ for all $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) If $|\gamma_q| < 1$ then $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\gamma_q^{-1}$.

Passeio aleatório deformado e equação de difusão deformada

A equação mestra para $\mathcal{P}_q(x_q, t)$ em uma rede de parâmetro a_q no espaço x_q é

$$\mathcal{P}(x, t + \Delta t) = p\mathcal{P}(x + (+a)_q, t) + (1 - p)\mathcal{P}(x + (-a)_q, t)$$



para $p = 1/2$ no limite $a \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, a partir de $(\pm a)_q \approx \pm a$ e de

$$\mathcal{P}(x_q + (\pm a)_q, t) \approx \mathcal{P}(x_q, t) + (\pm a)_q D_q \mathcal{P} + \frac{(\pm a)_q^2}{2} D_q^2 \mathcal{P}, \quad \mathcal{P}(x_q, t + \Delta t) \approx \mathcal{P}(x_q, t) + \Delta t \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial t}$$

obtem-se a **equação de difusão deformada** (DFPE, PRE da Costa et al. (2020))

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x_q, t)}{\partial t} = \Gamma D_q^2 \mathcal{P}(x_q, t), \quad \Gamma = \frac{a^2}{2\Delta t}, \quad D_q f(x) = (1 + \gamma_q x) \frac{df}{dx}$$

Estrutura da equação de difusão deformada

$$\frac{\partial \mathcal{P}(x_q, t)}{\partial t} = \Gamma D_q^2 \mathcal{P}(x_q, t) \quad , \quad \Gamma = \frac{a^2}{2\Delta t} \quad , \quad D_q f(x) = (1 + \gamma_q x) \frac{df}{dx}$$

é equivalente a

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \Gamma \frac{\partial}{\partial x} (1 + \gamma_q x) \frac{\partial}{\partial x} (1 + \gamma_q x) P(x, t) \quad (\text{van Kampen diffusion})$$

com as relações

$$P(x, t) = \frac{\mathcal{P}(x_q, t)}{1 + \gamma_q x} \quad , \quad 1 = \int P(x, t) dx = \int \mathcal{P}(x_q, t) dx_q$$

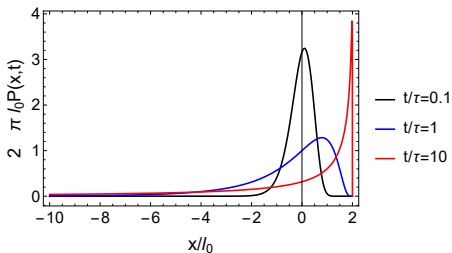
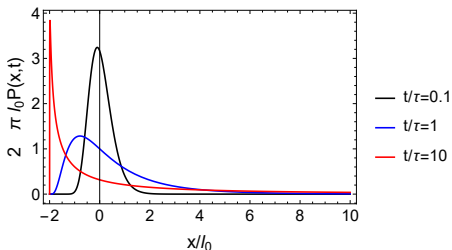
Assim, a solução de **difusão livre homogênea** no espaço deformado x_q

$$\mathcal{P}(x_q, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma t}} \exp\left(-\frac{x_q^2}{2\Gamma t}\right)$$

corresponde a **difusão livre não homogênea** no espaço x dada por

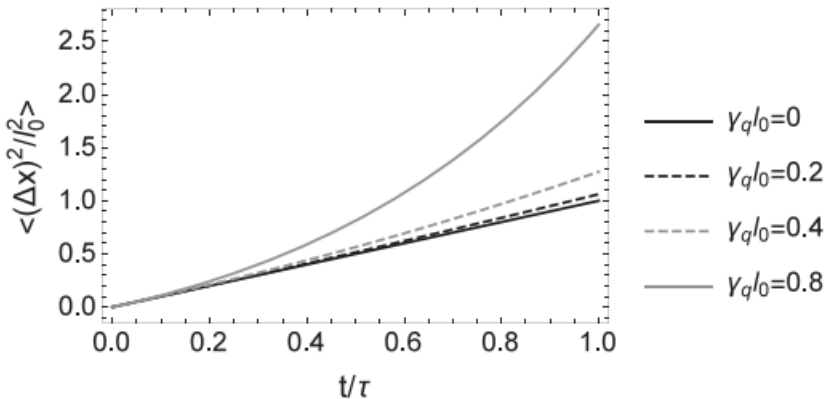
$$P(x, t) = \frac{1}{1 + \gamma_q x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Gamma t}} \exp\left(-\frac{\ln^2(1 + \gamma_q x)}{(2\Gamma t)\gamma_q^2}\right)$$

Tempos longos ($t \rightarrow \infty$) solução estacionária



$P_s(x) = \delta(x + 1/\gamma_q)$ com $x > -1/\gamma_q$ ($\gamma_q > 0$) ou $x < -1/\gamma_q$ ($\gamma_q < 0$)

MSD (mean standard deviation) - desvio padrão médio



$$\langle (\Delta x)^2(t) \rangle = \langle x^2(t) \rangle - \langle x(t) \rangle^2 = \frac{e^{2\Gamma t \gamma_q^2} - e^{\Gamma t \gamma_q^2}}{\gamma_q^2}$$

Comparação RW-DRW

propriedade	passeio aleatório	passeio aleatório deformado
triângulo de Pascal	simetria ao redor de $x = 0$	asimetria
aleatoriedade	sim	não
limite assintótico	não	$X_n \rightarrow -1/\gamma_q$
S_n	$X_1 + \dots + X_n +$	$X_1 \oplus_q \dots \oplus_q X_n$
memória	não	não
equação de difusão	$\partial_t P(x, t) = \Gamma \partial_{xx} P(x, t)$	$\partial_t \mathcal{P}(x_q, t) = \Gamma D_q^2 \mathcal{P}(x_q, t)$
solução estacionária	constante ≈ 0	$P_s(x) = \delta(x + 1/\gamma_q)$
MSD $\langle (\Delta x)^2(t) \rangle$	Γt	$\frac{e^{2\Gamma t \gamma_q^2} - e^{\Gamma t \gamma_q^2}}{\gamma_q^2}$
tipo de difusão	linear	exponencial
tempo característico	∞	$\tau = 1/(\gamma_q^2 \Gamma)$
localização	não	$x = -1/\gamma_q$

Conteúdo

- 1 Passeio aleatório
 - Preliminares
- 2 Passeio aleatório deformado
 - Estatística não extensiva: motivações
 - Deformando o RW
 - Equação mestra deformada e distribuição de probabilidade deformada
- 3 Conclusões e perspectivas

Considerações finais

- 1 Uma supressão de aleatoriedade é observada para o DRW com $|\gamma_q| < 1$ refletida na convergência de qualquer trajetória começando em $X = 0$, sendo o limite assintótico $x = -1/\gamma_q$.
- 2 A convergência exponencial das trajetórias do DRW são consequência da q -deformação utilizada.
- 3 A equação mestra do DRW implica uma equação de Fokker-Planck deformada que resulta um caso particular da equação inhomogênea de difusão de van Kampen.
- 4 Uma localização e um tempo característico finito resultam dependentes do parâmetro de deformação γ_q , recuperando-se o caso padrão para deformação nula.
- 5 Outras deformações poderiam ser empregadas para gerar outros DRW, como por exemplo a deformação da álgebra de Kaniadakis herdada da estatística de Kaniadakis.

Referências

1. C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics* (Springer, New York, 2009).
2. E. P. Borges, *A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics*. *Physica A* **340**, 95 (2004). (438 citações)
3. N. G. van Kampen, *Diffusion in Inhomogeneous Media*. *Z. Phys. B Condensed Matter* **68**, 135 (1987).
4. N. G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Elsevier, North Holland, 2007).
5. da Costa B. G., I. S. Gomez and E. P. Borges, *Deformed Fokker-Planck equation: Inhomogeneous medium with a position-dependent mass*. *Phys. Rev. E* **102**, 062105 (2020).
6. I. S. Gomez, *Deformed random walk: Suppression of randomness and inhomogeneous diffusion*. *Phys. Rev. E* **107**, 034113 (2023).
7. G. Kaniadakis, *Statistical mechanics in the context of special relativity*. *Phys. Rev. E* **66**, 056125 (2002).

Obrigado
Gracias

E-mail: ignacio.gomez@uesb.edu.br