

V CICLO DE SEMINÁRIOS DE FÍSICA

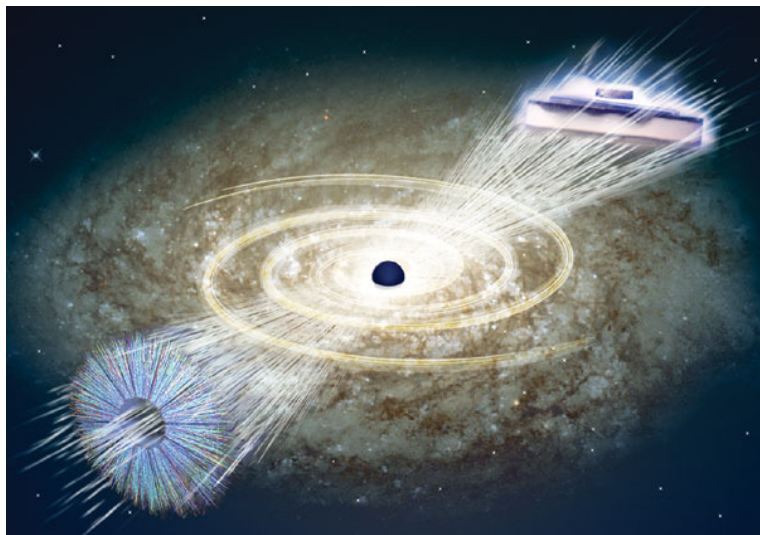
Colegiado de Física - Itapetinga
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia

A Conexão entre Hidrodinâmica Relativística e Perturbações de Buracos Negros

Alex dos Santos Miranda

Laboratório de Astrofísica Teórica e Observacional
Universidade Estadual de Santa Cruz

19 de novembro de 2019



Resumo da apresentação

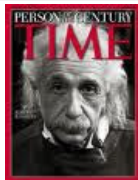
- 1 A Teoria de Perturbações da Relatividade Geral
- 2 Os Modos Quase-Normais de Buracos Negros
- 3 A Correspondência Anti-de Sitter/Conformal Field Theory
- 4 Perturbações Gravitoeletromagnéticas de Cordas Negras em Rotação
- 5 A Hidrodinâmica Relativística de Terceira Ordem
- 6 Coeficientes de Transporte de um Plasma CFT Dual

1. A TEORIA DE PERTURBAÇÕES DA RELATIVIDADE GERAL

O espaço-tempo de fundo

- Equações de Einstein:

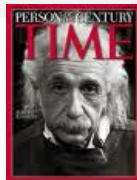
$$G_{MN} + \Lambda g_{MN} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{MN}.$$



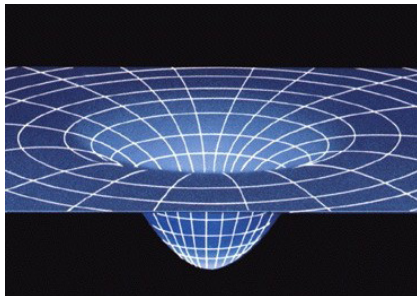
O espaço-tempo de fundo

- Equações de Einstein:

$$G_{MN} + \Lambda g_{MN} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{MN}.$$



- Solução clássica para o *background* (buraco negro): g_{MN} .

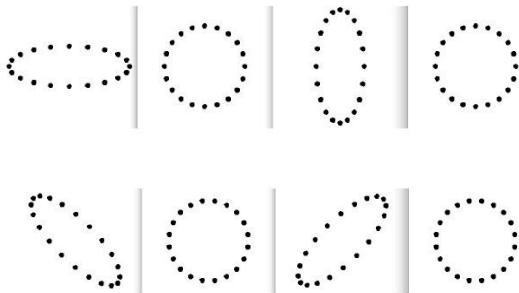


Campos de perturbação

- Spin 0: eq. de **Klein-Gordon**, pión π^0 ;
- Spin $\frac{1}{2}$: eq. de **Dirac**, neutrino ν ;
- Spin 1: eqs. de **Maxwell**, fóton γ ;
- Spin 2: eqs. de **Einstein** 'linearizadas', gráviton (?).

Campos de perturbação

- **Spin 0**: eq. de **Klein-Gordon**, pión π^0 ;
- **Spin $\frac{1}{2}$** : eq. de **Dirac**, neutrino ν ;
- **Spin 1**: eqs. de **Maxwell**, fóton γ ;
- **Spin 2**: eqs. de **Einstein** 'linearizadas', gráviton (?).



Hipóteses de trabalho

- Campo fraco \implies despreza-se *backreaction* sobre a métrica;
- Perturbações de 1^a ordem \implies *superposição* linear;
- Em geral, considera-se campos *não-massivos*;
- Condições de contorno *fisicamente* bem definidas;
- Campos podem ser *clássicos* ou *quânticos*.

Campo escalar no espaço-tempo de Schwarzschild

- A geometria de Schwarzschild [$G = c = 1$]:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

- Equação de Klein-Gordon para um campo com $m = 0$:

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^M} \sqrt{-g} g^{MN} \frac{\partial}{\partial x^N} \Phi = 0.$$

- Separação de variáveis:

$$\Phi_{lm}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\phi_l(t, r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

- Equação para $\phi_l(t, r)$:

$$\frac{\partial^2 \phi_l}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial r_*^2} + V_l(r) \phi_l = 0.$$

Campo escalar no espaço-tempo de Schwarzschild

- A geometria de Schwarzschild [$G = c = 1$]:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

- Equação de Klein-Gordon para um campo com $m = 0$:

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^M} \sqrt{-g} g^{MN} \frac{\partial}{\partial x^N} \Phi = 0.$$

- Separação de variáveis:

$$\Phi_{lm}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\phi_l(t, r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

- Equação para $\phi_l(t, r)$:

$$\frac{\partial^2 \phi_l}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial r_*^2} + V_l(r) \phi_l = 0.$$

Campo escalar no espaço-tempo de Schwarzschild

- A geometria de Schwarzschild [$G = c = 1$]:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

- Equação de Klein-Gordon para um campo com $m = 0$:

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^M} \sqrt{-g} g^{MN} \frac{\partial}{\partial x^N} \Phi = 0.$$

- Separação de variáveis:

$$\Phi_{lm}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\phi_l(t, r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

- Equação para $\phi_l(t, r)$:

$$\frac{\partial^2 \phi_l}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial r_*^2} + V_l(r) \phi_l = 0.$$

Campo escalar no espaço-tempo de Schwarzschild

- A geometria de Schwarzschild [$G = c = 1$]:

$$ds^2 = -(1 - 2M/r) dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

- Equação de Klein-Gordon para um campo com $m = 0$:

$$\square\Phi = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^M} \sqrt{-g} g^{MN} \frac{\partial}{\partial x^N} \Phi = 0.$$

- Separação de variáveis:

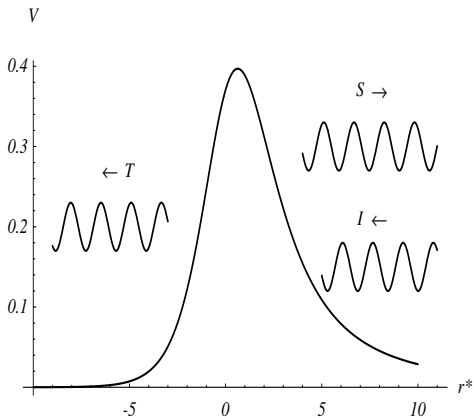
$$\Phi_{lm}(t, r, \theta, \varphi) = \frac{\phi_l(t, r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

- Equação para $\phi_l(t, r)$:

$$\frac{\partial^2 \phi_l}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi_l}{\partial r_*^2} + V_l(r) \phi_l = 0.$$

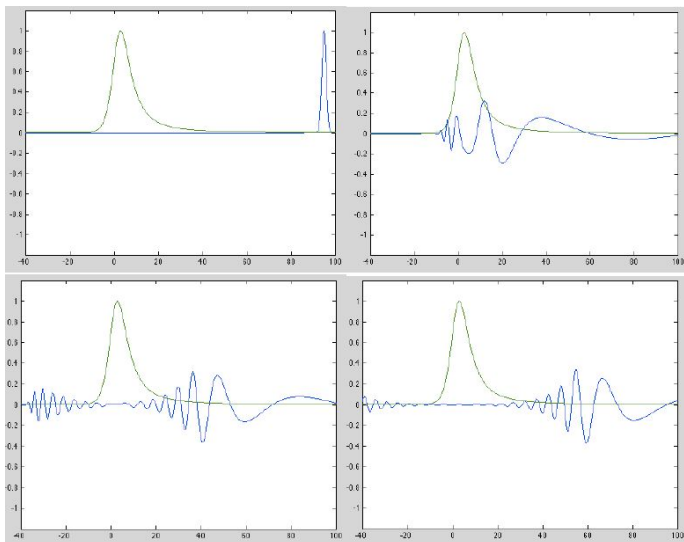
Potencial efetivo e a coordenada tartaruga

$$V_l = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad \text{e} \quad r_* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right).$$

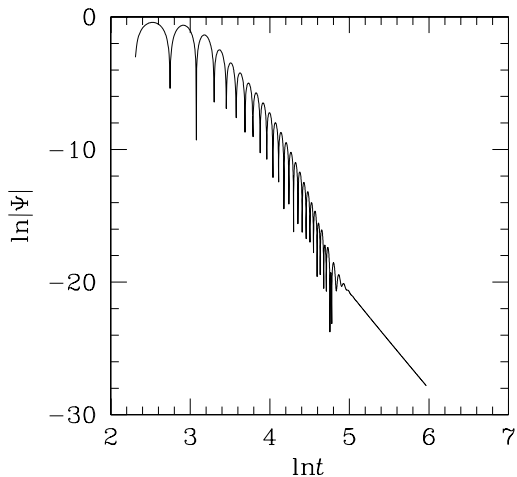


2. OS MODOS QUASE-NORMAIS DE BURACOS NEGROS

Evolução de um pacote de ondas

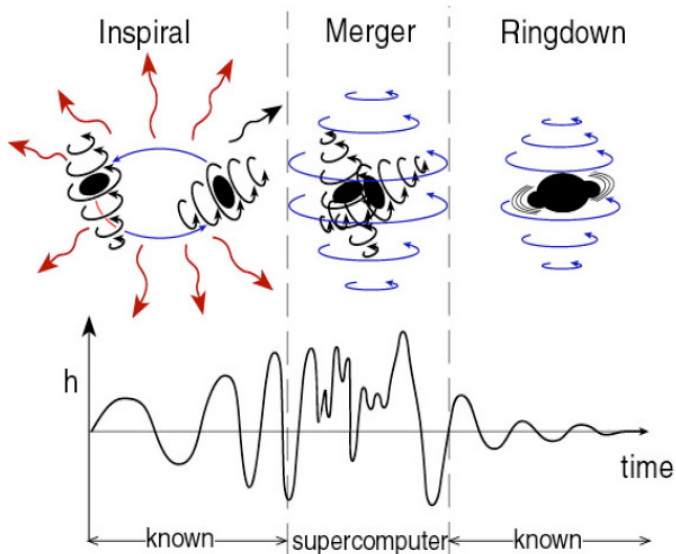


O que são modos quase-normais?

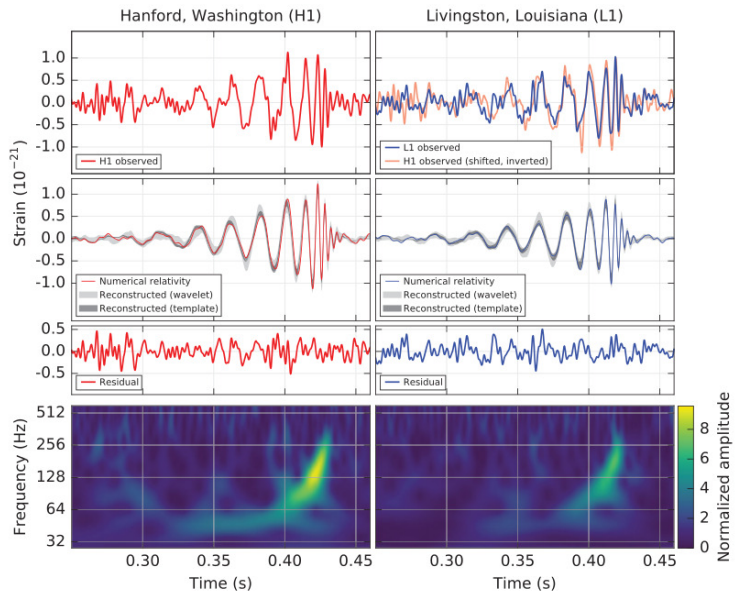


C.V. Vishveshwara, *Nature* **227**, 936 (1970).

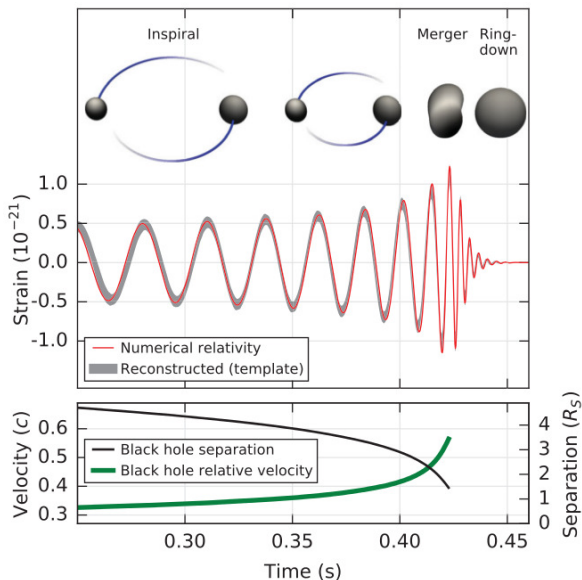
QNM's e sistemas binários



O evento GW150914 [B. P. Abbott et al., *Phys. Rev. Lett.* **116**, 061102 (2016)].



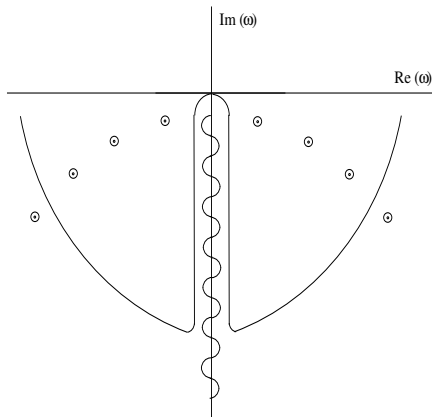
A fusão de dois buracos negros



Definição: pólos da função de Green [H.P. Nollert e B.G. Schmidt, *Phys. Rev. D* **8**, 2617 (1992)].

$$\mathcal{G}(t, r_*, r_*^0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\mathcal{G}}(\omega, r_*, r_*^0) e^{-i\omega t}$$

- Semi-círculo infinito
⇒ retroespalhamento inicial
- Pólos da função de Green
⇒ modos quase-normais
- Integral na linha de corte
⇒ decaimento numa lei de potência, $t^{-\alpha}$



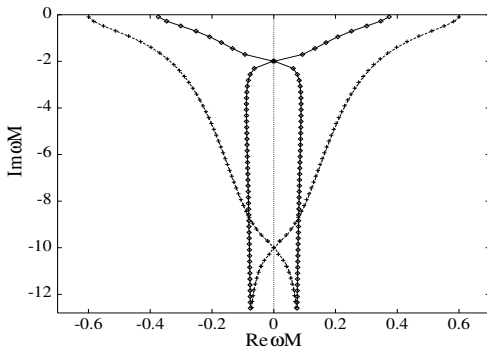
Condições de contorno e o espectro QNM

- Causal: onda plana 'entrando' no horizonte de eventos

$$\phi(t, r_*) \sim e^{-i\omega(t+r_*)}$$

- Onda plana 'saindo' em direção ao infinito

$$\phi(t, r_*) \sim e^{-i\omega(t-r_*)}$$



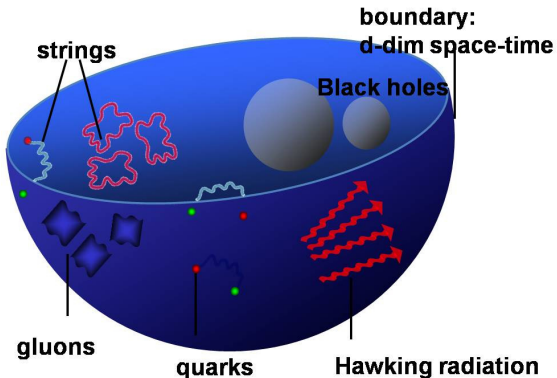
3. A CORRESPONDÊNCIA ADS/CFT

Formulação Original [J. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* 2, 231 (1998)].

Teorias de Cordas (ou teoria M)
sobre background AdS

dual

Teorias de campos conformemente
invariantes (CFTs) na fronteira

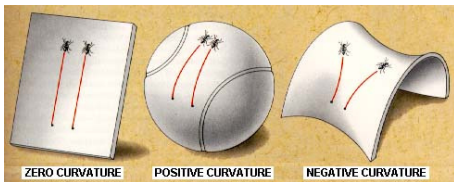


Maldacena



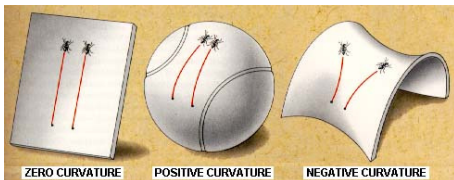
Witten

Espaço-tempo anti-de Sitter



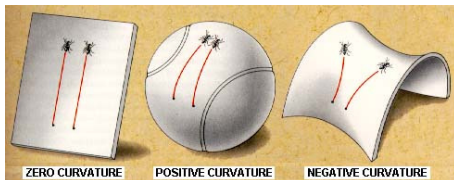
- Métrica:
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

Espaço-tempo anti-de Sitter

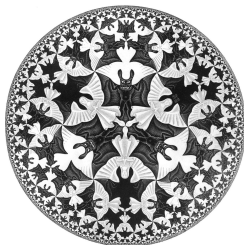
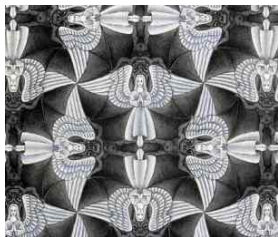


- Métrica:
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) dt^2 + \left(1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$

Espaço-tempo anti-de Sitter



- Métrica:
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dt^2 + \left(1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2.$$



Branas negras AdS em d-dimensões [$\hbar = c = k_B = 1$]

- Métrica do espaço-tempo:

$$ds^2 = \frac{r^2}{\ell^2} \left[-f(r) dt^2 + \sum_{i=1}^{d-2} dx^i dx_i \right] + \frac{\ell^2}{r^2 f(r)} dr^2,$$

- Função horizonte:

$$f(r) = 1 - \frac{2M\ell^2}{r^{d-1}}.$$

- Raio anti-de Sitter:

$$\ell^2 = -(d-2)(d-1)/2\Lambda_c.$$

- Horizonte de eventos:

$$r_h = (2M\ell^2)^{1/(d-1)}.$$

- Temperatura de Hawking:

$$T = \frac{d-1}{4\pi} \frac{r_h}{\ell^2}.$$

Branas negras AdS em d-dimensões [$\hbar = c = k_B = 1$]

- Métrica do espaço-tempo:

$$ds^2 = \frac{r^2}{\ell^2} \left[-f(r) dt^2 + \sum_{i=1}^{d-2} dx^i dx_i \right] + \frac{\ell^2}{r^2 f(r)} dr^2,$$

- Função horizonte:

$$f(r) = 1 - \frac{2M\ell^2}{r^{d-1}}.$$

- Raio anti-de Sitter:

$$\ell^2 = -(d-2)(d-1)/2\Lambda_c.$$

- Horizonte de eventos:

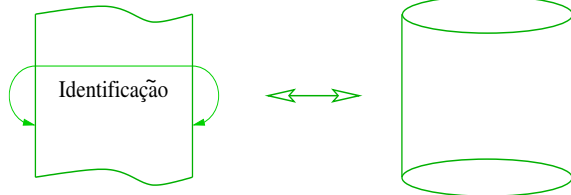
$$r_h = (2M\ell^2)^{1/(d-1)}.$$

- Temperatura de Hawking:

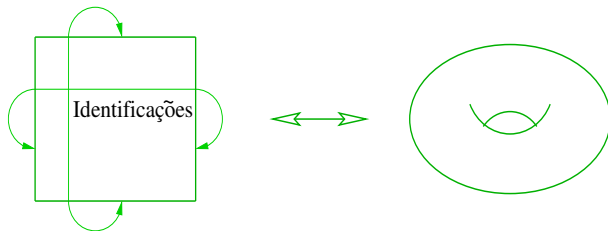
$$T = \frac{d-1}{4\pi} \frac{r_h}{\ell^2}.$$

Topologia do espaço-tempo 4D

- Cilíndrica:



- Toroidal:



gravitação	teoria de campos
acoplamento das cordas $4\pi g_s$	g_{YM}^2 acoplamento de gauge
parâmetro adimensional ℓ^4/l_s^4	$g_{YM}^2 N$ acoplamento de 't Hooft
supergravidade clássica	teoria fortemente interagente
campo escalar ϕ	operador $\hat{O} = \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$
massa do campo	dimensão do operador
isometrias do espaço AdS	simetrias conformes
buraco negro	sistema em equilíbrio térmico
parâmetros (M, J, Q)	energia, momento, carga
$T_{Hawking}$, $S_{Bekenstein-Hawking}$	temperatura, entropia
função de partição	gerador das funções de Green
perturbações gravitacionais	flutuações do tensor $T_{\mu\nu}$
perturbações eletromagnéticas	flutuações da corrente J_μ
modos quase-normais (QNMs)	pólos das funções de correlação
parte real das frequências QN	energia das excitações coletivas
parte imaginária QN	tempo de termalização

gravitação	teoria de campos
acoplamento das cordas $4\pi g_s$	g_{YM}^2 acoplamento de gauge
parâmetro adimensional ℓ^4/l_s^4	$g_{YM}^2 N$ acoplamento de 't Hooft
supergravidade clássica	teoria fortemente interagente
campo escalar ϕ	operador $\hat{O} = \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$
massa do campo	dimensão do operador
isometrias do espaço AdS	simetrias conformes
buraco negro	sistema em equilíbrio térmico
parâmetros (M, J, Q)	energia, momento, carga
$T_{Hawking}$, $S_{Bekenstein-Hawking}$	temperatura, entropia
função de partição	gerador das funções de Green
perturbações gravitacionais	flutuações do tensor $T_{\mu\nu}$
perturbações eletromagnéticas	flutuações da corrente J_μ
modos quase-normais (QNMs)	pólos das funções de correlação
parte real das frequências QN	energia das excitações coletivas
parte imaginária QN	tempo de termalização

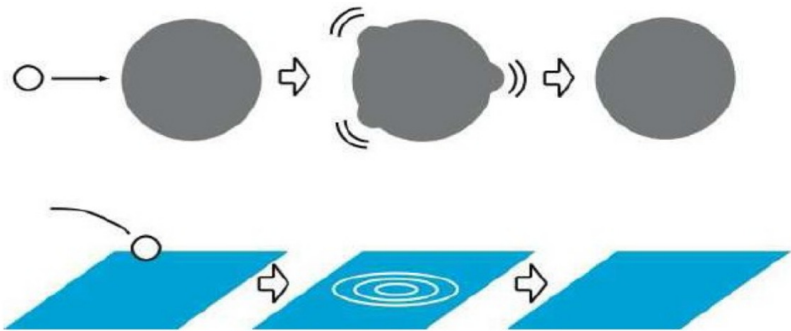
gravitação	teoria de campos
acoplamento das cordas $4\pi g_s$	g_{YM}^2 acoplamento de gauge
parâmetro adimensional ℓ^4/l_s^4	$g_{YM}^2 N$ acoplamento de 't Hooft
supergravidade clássica	teoria fortemente interagente
campo escalar ϕ	operador $\hat{O} = \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$
massa do campo	dimensão do operador
isometrias do espaço AdS	simetrias conformes
buraco negro	sistema em equilíbrio térmico
parâmetros (M, J, Q)	energia, momento, carga
$T_{Hawking}, S_{Bekenstein-Hawking}$	temperatura, entropia
função de partição	gerador das funções de Green
perturbações gravitacionais	flutuações do tensor $T_{\mu\nu}$
perturbações eletromagnéticas	flutuações da corrente J_μ
modos quase-normais (QNMs)	pólos das funções de correlação
parte real das frequências QN	energia das excitações coletivas
parte imaginária QN	tempo de termalização

gravitação	teoria de campos
acoplamento das cordas $4\pi g_s$	g_{YM}^2 acoplamento de gauge
parâmetro adimensional ℓ^4/l_s^4	$g_{YM}^2 N$ acoplamento de 't Hooft
supergravidade clássica	teoria fortemente interagente
campo escalar ϕ	operador $\hat{O} = \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$
massa do campo	dimensão do operador
isometrias do espaço AdS	simetrias conformes
buraco negro	sistema em equilíbrio térmico
parâmetros (M, J, Q)	energia, momento, carga
$T_{Hawking}$, $S_{Bekenstein-Hawking}$	temperatura, entropia
função de partição	gerador das funções de Green
perturbações gravitacionais	flutuações do tensor $T_{\mu\nu}$
perturbações eletromagnéticas	flutuações da corrente J_μ
modos quase-normais (QNMs)	pólos das funções de correlação
parte real das frequências QN	energia das excitações coletivas
parte imaginária QN	tempo de termalização

gravitação	teoria de campos
acoplamento das cordas $4\pi g_s$	g_{YM}^2 acoplamento de gauge
parâmetro adimensional ℓ^4/l_s^4	$g_{YM}^2 N$ acoplamento de 't Hooft
supergravidade clássica	teoria fortemente interagente
campo escalar ϕ	operador $\hat{O} = \text{Tr}(F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$
massa do campo	dimensão do operador
isometrias do espaço AdS	simetrias conformes
buraco negro	sistema em equilíbrio térmico
parâmetros (M, J, Q)	energia, momento, carga
$T_{Hawking}$, $S_{Bekenstein-Hawking}$	temperatura, entropia
função de partição	gerador das funções de Green
perturbações gravitacionais	flutuações do tensor $T_{\mu\nu}$
perturbações eletromagnéticas	flutuações da corrente J_μ
modos quase-normais (QNMs)	pólos das funções de correlação
parte real das frequências QN	energia das excitações coletivas
parte imaginária QN	tempo de termalização

Flutuações num BN anti-de Sitter

Buraco negro anti-de Sitter no bulk 5D



Teoria tipo-QCD à T finita na fronteira 4D

A teoria da resposta linear

- Hamiltoniano:

$$\hat{H}_U(t) = \hat{H} + U(t)\hat{\mathcal{O}}_1.$$

- Variação no valor médio de $\hat{\mathcal{O}}_2$:

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{R}(t, t') \delta U(t'),$$

onde

$$\mathcal{R}(t, t') = \frac{\delta \langle \hat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle}{\delta U(t')} = - \left(\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t - t') \langle [\hat{\mathcal{O}}_2^{(I)}(t), \hat{\mathcal{O}}_1^{(I)}(t')] \rangle$$

e $\langle \rangle$ denota a média térmica representada por $\hat{\rho} = Z^{-1} e^{-\hat{H}/T}$.

- Exemplos:

- $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{B} \implies \chi = \frac{\delta M}{\delta B} \sim \langle \hat{\mathbf{s}}(x, t) \cdot \hat{\mathbf{s}}(x', t') \rangle$

- $\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{E} \implies \sigma = \frac{\delta j}{\delta E} \sim \langle \hat{\mathbf{j}}(x, t) \cdot \hat{\mathbf{j}}(x', t') \rangle$

A teoria da resposta linear

- Hamiltoniano:

$$\hat{H}_U(t) = \hat{H} + U(t)\hat{\mathcal{O}}_1.$$

- Variação no valor médio de $\hat{\mathcal{O}}_2$:

$$\langle \hat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle = \langle \hat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{R}(t, t') \delta U(t'),$$

onde

$$\mathcal{R}(t, t') = \frac{\delta \langle \hat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle}{\delta U(t')} = - \left(\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t - t') \left\langle \left[\hat{\mathcal{O}}_2^{(I)}(t), \hat{\mathcal{O}}_1^{(I)}(t') \right] \right\rangle$$

e $\langle \rangle$ denota a média térmica representada por $\hat{\rho} = Z^{-1} e^{-\hat{H}/T}$.

- Exemplos:

- $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{B} \implies \chi = \frac{\delta M}{\delta B} \sim \langle \hat{\mathbf{s}}(x, t) \cdot \hat{\mathbf{s}}(x', t') \rangle$

- $\hat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{E} \implies \sigma = \frac{\delta j}{\delta E} \sim \langle \hat{\mathbf{j}}(x, t) \cdot \hat{\mathbf{j}}(x', t') \rangle$

A teoria da resposta linear

- Hamiltoniano:

$$\widehat{H}_U(t) = \widehat{H} + U(t)\widehat{\mathcal{O}}_1.$$

- Variação no valor médio de $\widehat{\mathcal{O}}_2$:

$$\langle \widehat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle = \langle \widehat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle_0 + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathcal{R}(t, t') \delta U(t'),$$

onde

$$\mathcal{R}(t, t') = \frac{\delta \langle \widehat{\mathcal{O}}_2(t) \rangle}{\delta U(t')} = - \left(\frac{i}{\hbar} \right) \theta(t - t') \left\langle \left[\widehat{\mathcal{O}}_2^{(I)}(t), \widehat{\mathcal{O}}_1^{(I)}(t') \right] \right\rangle$$

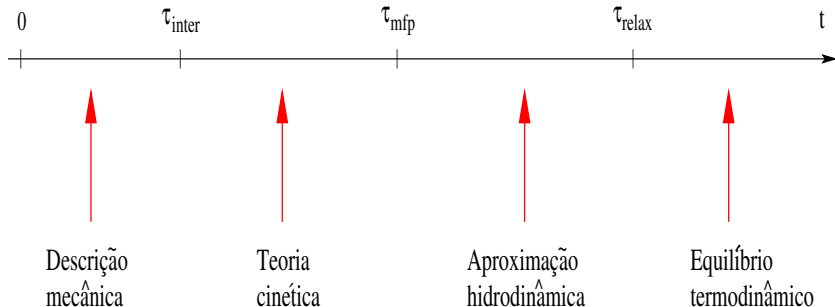
e $\langle \rangle$ denota a média térmica representada por $\widehat{\rho} = Z^{-1} e^{-\widehat{H}/T}$.

- Exemplos:

- $\widehat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{B} \implies \chi = \frac{\delta M}{\delta B} \sim \langle \widehat{\mathbf{s}}(x, t) \cdot \widehat{\mathbf{s}}(x', t') \rangle$

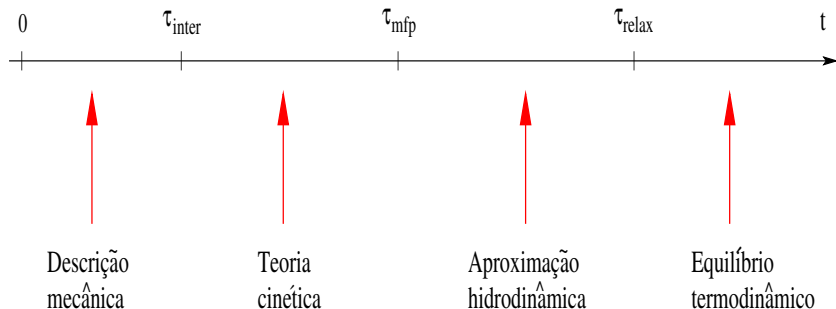
- $\widehat{\mathbf{j}} \cdot \mathbf{E} \implies \sigma = \frac{\delta j}{\delta E} \sim \langle \widehat{\mathbf{j}}(x, t) \cdot \widehat{\mathbf{j}}(x', t') \rangle$

Aproximação hidrodinâmica [A. Starinets, *PIRSA*, 07030034 (2007)].



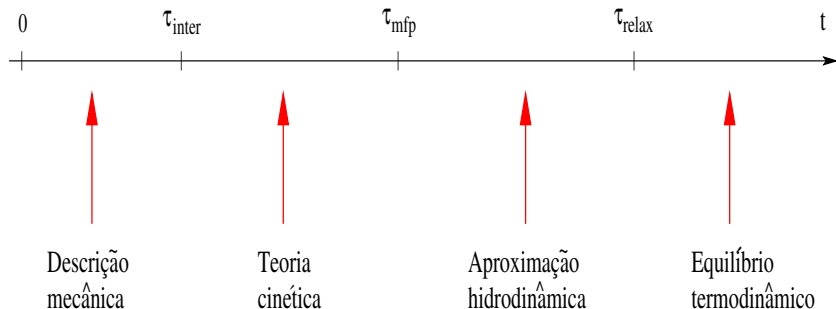
- $\hbar/k_B T$ é um tempo de decoerência ou de colisão característico.
 - $\hbar\omega \gg k_B T$: regime dominado por uma física **sem colisões**.
 - $\hbar\omega \ll k_B T$: transporte dominado por colisões, **hidrodinâmica**.
- Regime hidrodinâmico: $\tau_{micro} \ll \tau \ll t_{global}$ e $l_{micro} \ll l \ll L_{global}$.

Aproximação hidrodinâmica [A. Starinets, *PIRSA*, 07030034 (2007)].



- $\hbar/k_B T$ é um tempo de decoerência ou de colisão característico.
 - $\hbar\omega \gg k_B T$: regime dominado por uma física **sem colisões**.
 - $\hbar\omega \ll k_B T$: transporte dominado por colisões, **hidrodinâmica**.
- Regime hidrodinâmico: $\tau_{micro} \ll \tau \ll t_{global}$ e $l_{micro} \ll l \ll L_{global}$.

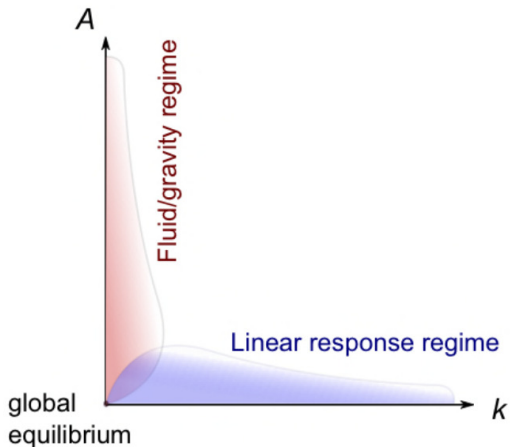
Aproximação hidrodinâmica [A. Starinets, *PIRSA*, 07030034 (2007)].



- $\hbar/k_B T$ é um tempo de decoerência ou de colisão característico.
 - $\hbar\omega \gg k_B T$: regime dominado por uma física **sem colisões**.
 - $\hbar\omega \ll k_B T$: transporte dominado por colisões, **hidrodinâmica**.
- Regime hidrodinâmico: $\tau_{micro} \ll \tau \ll t_{global}$ e $l_{micro} \ll l \ll L_{global}$.

Resposta linear e hidrodinâmica

- Regimes de validade



V. Hubeny, *Adv. High Energy Phys.* **2010**, 297916 (2010).

4. PERTURBAÇÕES GRAVITOELETROMAGNÉTICAS DE CORDAS NEGRAS EM ROTAÇÃO

ASM, J. Morgan, A. Kandus e V.T. Zanchin, *Classical and Quantum Gravity* **32**, 235002 (2015)

A geometria do background [J. Lemos e V. Zanchin, *PRD* 54, 3840 (1996).]

- Métrica do espaço-tempo:

$$ds^2 = -\frac{r^2}{\ell^2} \gamma^2 f (dt - a d\varphi)^2 + \frac{r^2}{\ell^2} \gamma^2 \left(\ell d\varphi - \frac{a}{\ell} dt \right)^2 + \frac{r^2}{\ell^2} dz^2 + \frac{\ell^2 dr^2}{r^2 f}.$$

- Potencial eletromagnético:

$$A = -\gamma \frac{c}{r} (dt - a d\varphi),$$

- Sendo:

$$f(r) = 1 - \frac{\ell^3 b}{r^3} + \frac{\ell^4 c^2}{r^4} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{\ell^2}}.$$

- Parâmetros físicos para $b \geq b_{crit} = 4(c^2/3)^{3/4}$:

$$a = -\frac{3\ell^2}{2J} (\mathcal{L} - M), \quad b = 2G (3\mathcal{L} - M),$$

$$c = 2Q\ell \sqrt{\frac{3\mathcal{L} - M}{\mathcal{L} + M}}, \quad \mathcal{L} = \sqrt{M^2 - \frac{8J^2}{9\ell^2}}.$$

A geometria do background [J. Lemos e V. Zanchin, *PRD* 54, 3840 (1996).]

- Métrica do espaço-tempo:

$$ds^2 = -\frac{r^2}{\ell^2} \gamma^2 f (dt - a d\varphi)^2 + \frac{r^2}{\ell^2} \gamma^2 \left(\ell d\varphi - \frac{a}{\ell} dt \right)^2 + \frac{r^2}{\ell^2} dz^2 + \frac{\ell^2 dr^2}{r^2 f}.$$

- Potencial eletromagnético:

$$A = -\gamma \frac{c}{r} (dt - a d\varphi),$$

- Sendo:

$$f(r) = 1 - \frac{\ell^3 b}{r^3} + \frac{\ell^4 c^2}{r^4} \quad \text{and} \quad \frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{a^2}{\ell^2}}.$$

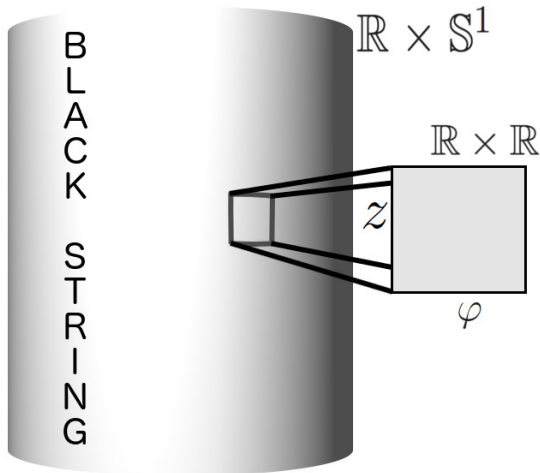
- Parâmetros físicos para $b \geq b_{crit} = 4(c^2/3)^{3/4}$:

$$a = -\frac{3\ell^2}{2J} (\mathcal{L} - M), \quad b = 2G(3\mathcal{L} - M),$$

$$c = 2Q\ell \sqrt{\frac{3\mathcal{L} - M}{\mathcal{L} + M}}, \quad \mathcal{L} = \sqrt{M^2 - \frac{8J^2}{9\ell^2}}.$$

A topologia da corda negra

- Propriedades locais versus globais:



Equações de perturbação à *1a* Teukolsky

- Baseado em Newman-Penrose (NP).
- Tétrada de vetores nulos e complexos: l^M, n^M, m^M, m^{*M} .
- Variações nos escalares de Weyl e de Maxwell:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{MNL P} l^M n^N l^L m^P; & \Psi_4 &= -C_{MNL P} n^M m^{*N} n^L m^{*P}; \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} F_{MN} [l^M n^N + m^{*M} m^N], & \phi_2 &= F_{MN} m^{*M} n^N.\end{aligned}$$

- Linearização das equações de Einstein-Maxwell no formalismo NP.
- Transformada de Fourier $\exp i(-\omega t + m\varphi + kz)$:

$$p = \frac{\gamma}{\ell} (m - a\omega) + i\ell k, \quad \varpi = \gamma \left(\omega - \frac{am}{\ell^2} \right).$$

- Equações radiais desacopladas:

$$\Lambda^2 Y_{\pm i} + P_i \Lambda_{\pm} Y_{\pm i} - Q_i Y_{\pm i} = \mathfrak{S}_{\pm i} \quad (i = 1, 2),$$

- Operadores diferenciais:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{d}{dr_{\pm}} \pm i\varpi, \quad \Lambda^2 = \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = \frac{d^2}{dr_{\pm}^2} + \varpi^2.$$

Equações de perturbação à *1a* Teukolsky

- Baseado em Newman-Penrose (NP).
- Tétrada de vetores nulos e complexos: l^M, n^M, m^M, m^{*M} .
- Variações nos escalares de Weyl e de Maxwell:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{MNL P} l^M n^N l^L m^P; & \Psi_4 &= -C_{MNL P} n^M m^{*N} n^L m^{*P}; \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} F_{MN} [l^M n^N + m^{*M} m^N], & \phi_2 &= F_{MN} m^{*M} n^N.\end{aligned}$$

- Linearização das equações de Einstein-Maxwell no formalismo NP.
- Transformada de Fourier $\exp i(-\omega t + m\varphi + kz)$:

$$p = \frac{\gamma}{\ell} (m - a\omega) + i\ell k, \quad \varpi = \gamma \left(\omega - \frac{am}{\ell^2} \right).$$

- Equações radiais desacopladas:

$$\Lambda^2 Y_{\pm i} + P_i \Lambda_{\pm} Y_{\pm i} - Q_i Y_{\pm i} = \mathfrak{S}_{\pm i} \quad (i = 1, 2),$$

- Operadores diferenciais:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{d}{dr_*} \pm i\varpi, \quad \Lambda^2 = \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = \frac{d^2}{dr_*^2} + \varpi^2.$$

Equações de perturbação à *la* Teukolsky

- Baseado em Newman-Penrose (NP).
- Tétrada de vetores nulos e complexos: l^M, n^M, m^M, m^{*M} .
- Variações nos escalares de Weyl e de Maxwell:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{MNL P} l^M m^N l^L m^P; & \Psi_4 &= -C_{MNL P} n^M m^{*N} n^L m^{*P}; \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} F_{MN} [l^M n^N + m^{*M} m^N], & \phi_2 &= F_{MN} m^{*M} n^N.\end{aligned}$$

- Linearização das equações de Einstein-Maxwell no formalismo NP.
- Transformada de Fourier $\exp i(-\omega t + m\varphi + kz)$:

$$p = \frac{\gamma}{\ell} (m - a\omega) + i\ell k, \quad \varpi = \gamma \left(\omega - \frac{am}{\ell^2} \right).$$

- Equações radiais desacopladas:

$$\Lambda^2 Y_{\pm i} + P_i \Lambda_{\pm} Y_{\pm i} - Q_i Y_{\pm i} = \mathfrak{S}_{\pm i} \quad (i = 1, 2),$$

- Operadores diferenciais:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{d}{dr_*} \pm i\varpi, \quad \Lambda^2 = \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = \frac{d^2}{dr_*^2} + \varpi^2.$$

Equações de perturbação à *la* Teukolsky

- Baseado em Newman-Penrose (NP).
- Tétrada de vetores nulos e complexos: l^M, n^M, m^M, m^{*M} .
- Variações nos escalares de Weyl e de Maxwell:

$$\begin{aligned}\Psi_0 &= -C_{MNL P} l^M m^N l^L m^P; & \Psi_4 &= -C_{MNL P} n^M m^{*N} n^L m^{*P}; \\ \phi_1 &= \frac{1}{2} F_{MN} [l^M n^N + m^{*M} m^N], & \phi_2 &= F_{MN} m^{*M} n^N.\end{aligned}$$

- Linearização das equações de Einstein-Maxwell no formalismo NP.
- Transformada de Fourier $\exp i(-\omega t + m\varphi + kz)$:

$$p = \frac{\gamma}{\ell} (m - a\omega) + i\ell k, \quad \varpi = \gamma \left(\omega - \frac{am}{\ell^2} \right).$$

- Equações radiais desacopladas:

$$\Lambda^2 Y_{\pm i} + P_i \Lambda_{\pm} Y_{\pm i} - Q_i Y_{\pm i} = \mathfrak{S}_{\pm i} \quad (i = 1, 2),$$

- Operadores diferenciais:

$$\Lambda_{\pm} = \frac{d}{dr_*} \pm i\varpi, \quad \Lambda^2 = \Lambda_+ \Lambda_- = \Lambda_- \Lambda_+ = \frac{d^2}{dr_*^2} + \varpi^2.$$

Transformação de Chandrasekhar generalizada

- Baseia-se na troca de Y_{+i} (ou Y_{-i}) por $Z_i^{(\pm)}$:

$$Y_{+i} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + (\Xi_i^{(\pm)} - 2i\varpi)\Lambda_- Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)},$$

$$Y_{-i} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + (\Xi_i^{(\pm)} + 2i\varpi)\Lambda_+ Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)}.$$

- Equações tipo-Schrödinger resultantes:

$$\Lambda^2 Z_i^{(\pm)} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)}$$

- Potenciais efetivos:

$$V_i^{(\pm)} = \pm q_j \frac{df_j}{dr_*} + q_j^2 f_j^2 + p^4 f_i,$$

sendo

$$f_i = \frac{rf}{\ell^2(p^2 r + q_j)} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j)$$

e

$$q_i = \frac{1}{2}\ell \left[3b + (-1)^{i+1} \sqrt{9b^2 + 16c^2 p^2} \right].$$

Transformação de Chandrasekhar generalizada

- Baseia-se na troca de Y_{+i} (ou Y_{-i}) por $Z_i^{(\pm)}$:

$$Y_{+i} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + (\Xi_i^{(\pm)} - 2i\varpi)\Lambda_- Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)},$$

$$Y_{-i} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + (\Xi_i^{(\pm)} + 2i\varpi)\Lambda_+ Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)}.$$

- Equações tipo-Schrödinger resultantes:

$$\Lambda^2 Z_i^{(\pm)} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)}$$

- Potenciais efetivos:

$$V_i^{(\pm)} = \pm q_j \frac{df_j}{dr_*} + q_j^2 f_j^2 + p^4 f_i,$$

sendo

$$f_i = \frac{rf}{\ell^2(p^2 r + q_j)} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j)$$

e

$$q_i = \frac{1}{2}\ell \left[3b + (-1)^{i+1} \sqrt{9b^2 + 16c^2 p^2} \right].$$

Transformação de Chandrasekhar generalizada

- Baseia-se na troca de Y_{+i} (ou Y_{-i}) por $Z_i^{(\pm)}$:

$$Y_{+i} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + (\Xi_i^{(\pm)} - 2i\varpi)\Lambda_- Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)},$$

$$Y_{-i} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + (\Xi_i^{(\pm)} + 2i\varpi)\Lambda_+ Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)}.$$

- Equações tipo-Schrödinger resultantes:

$$\Lambda^2 Z_i^{(\pm)} = V_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} + \mathcal{F}_i^{(\pm)}$$

- Potenciais efetivos:

$$V_i^{(\pm)} = \pm q_j \frac{df_i}{dr_*} + q_j^2 f_i^2 + p^4 f_i,$$

sendo

$$f_i = \frac{rf}{\ell^2(p^2 r + q_j)} \quad (i, j = 1, 2; i \neq j)$$

e

$$q_i = \frac{1}{2}\ell \left[3b + (-1)^{i+1} \sqrt{9b^2 + 16c^2 p^2} \right].$$

Mecânica quântica SUSY das perturbações

- Na ausência de fontes:

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2} + W_i^2 \pm \frac{dW_i}{dr_*} \right) Z_i^{(\pm)} = (\omega^2 - \Omega_i^2) Z_i^{(\pm)},$$

sendo

$$W_i = q_j f_j + i\Omega_i \quad \text{e} \quad \Omega_i = -i \frac{p^4}{2q_j}, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j).$$

- Operadores “bosônicos”:

$$A_i = \frac{d}{dr_*} + W_i \quad \text{e} \quad A_i^\dagger = -\frac{d}{dr_*} + W_i.$$

- Introduzindo os hamiltonianos $H_i^{(-)} = A_i^\dagger A_i$ e $H_i^{(+)} = A_i A_i^\dagger$, temos:

$$H_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} = E_i Z_i^{(\pm)},$$

sendo

$$E_i = \omega^2 - \Omega_i^2.$$

Mecânica quântica SUSY das perturbações

- Na ausência de fontes:

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2} + W_i^2 \pm \frac{dW_i}{dr_*} \right) Z_i^{(\pm)} = (\omega^2 - \Omega_i^2) Z_i^{(\pm)},$$

sendo

$$W_i = q_j f_j + i\Omega_i \quad \text{e} \quad \Omega_i = -i \frac{p^4}{2q_j}, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j).$$

- Operadores “bosônicos”:

$$A_i = \frac{d}{dr_*} + W_i \quad \text{e} \quad A_i^\dagger = -\frac{d}{dr_*} + W_i.$$

- Introduzindo os hamiltonianos $H_i^{(-)} = A_i^\dagger A_i$ e $H_i^{(+)} = A_i A_i^\dagger$, temos:

$$H_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} = E_i Z_i^{(\pm)},$$

sendo

$$E_i = \omega^2 - \Omega_i^2.$$

Mecânica quântica SUSY das perturbações

- Na ausência de fontes:

$$\left(-\frac{d^2}{dr_*^2} + W_i^2 \pm \frac{dW_i}{dr_*} \right) Z_i^{(\pm)} = (\omega^2 - \Omega_i^2) Z_i^{(\pm)},$$

sendo

$$W_i = q_j f_j + i\Omega_i \quad \text{e} \quad \Omega_i = -i \frac{p^4}{2q_j}, \quad (i, j = 1, 2; i \neq j).$$

- Operadores “bosônicos”:

$$A_i = \frac{d}{dr_*} + W_i \quad \text{e} \quad A_i^\dagger = -\frac{d}{dr_*} + W_i.$$

- Introduzindo os hamiltonianos $H_i^{(-)} = A_i^\dagger A_i$ e $H_i^{(+)} = A_i A_i^\dagger$, temos:

$$H_i^{(\pm)} Z_i^{(\pm)} = E_i Z_i^{(\pm)},$$

sendo

$$E_i = \omega^2 - \Omega_i^2.$$

Mecânica quântica SUSY das perturbações

- As relações anteriores indicam que

$$\mathcal{C}_i^{(+)} Z_i^{(-)} = A_i^\dagger Z_i^{(+)} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_i^{(-)} Z_i^{(+)} = A_i Z_i^{(-)},$$

sendo

$$\mathcal{C}_i^{(+)} \mathcal{C}_i^{(-)} = E_i = \omega^2 - \Omega_i^2.$$

- Após uma escolha conveniente da normalização relativa de $Z_i^{(-)}$ e $Z_i^{(+)}$, obtemos:

$$(p^4 + 2i\omega q_j) Z_i^{(-)} = (p^4 + 2q_j^2 f_i) Z_i^{(+)} - 2q_j \frac{d}{dr_*} Z_i^{(+)},$$

$$(p^4 - 2i\omega q_j) Z_i^{(+)} = (p^4 + 2q_j^2 f_i) Z_i^{(-)} + 2q_j \frac{d}{dr_*} Z_i^{(-)}.$$

Mecânica quântica SUSY das perturbações

- As relações anteriores indicam que

$$\mathcal{C}_i^{(+)} Z_i^{(-)} = A_i^\dagger Z_i^{(+)} \quad \text{e} \quad \mathcal{C}_i^{(-)} Z_i^{(+)} = A_i Z_i^{(-)},$$

sendo

$$\mathcal{C}_i^{(+)} \mathcal{C}_i^{(-)} = E_i = \omega^2 - \Omega_i^2.$$

- Após uma escolha conveniente da normalização relativa de $Z_i^{(-)}$ e $Z_i^{(+)}$, obtemos:

$$(p^4 + 2i\omega q_j) Z_i^{(-)} = (p^4 + 2q_j^2 f_i) Z_i^{(+)} - 2q_j \frac{d}{dr_*} Z_i^{(+)},$$

$$(p^4 - 2i\omega q_j) Z_i^{(+)} = (p^4 + 2q_j^2 f_i) Z_i^{(-)} + 2q_j \frac{d}{dr_*} Z_i^{(-)}.$$

5. A HIDRODINÂMICA RELATIVÍSTICA DE TERCEIRA ORDEM

S.M. Diles, L.A.H. Mamani, ASM, V.T. Zanchin, ArXiv: 1909.05199, submetido ao JHEP.

A expansão em gradientes

- A hidrodinâmica é uma teoria efetiva, válida para flutuações lentas e de grande comprimento de onda.
- Sendo uma teoria efetiva, a hidrodinâmica é construída como uma expansão perturbativa.
- Em ordem zero, temos um fluido ideal (não-viscoso).
- A viscosidade aparece em termos de ordens mais altas.
- Construção relativística: covariância e o tensor energia-momento.
- Esquema geral:

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu}(\phi) + T_1^{\mu\nu}(\partial\phi) + T_2^{\mu\nu}(\partial^2\phi, (\partial\phi)^2) + \dots$$

A expansão em gradientes

- A hidrodinâmica é uma teoria efetiva, válida para flutuações lentas e de grande comprimento de onda.
- Sendo uma teoria efetiva, a hidrodinâmica é construída como uma expansão perturbativa.
- Em ordem zero, temos um fluido ideal (não-viscoso).
- A viscosidade aparece em termos de ordens mais altas.
- Construção relativística: covariância e o tensor energia-momento.
- Esquema geral:

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu}(\phi) + T_1^{\mu\nu}(\partial\phi) + T_2^{\mu\nu}(\partial^2\phi, (\partial\phi)^2) + \dots$$

A expansão em gradientes

- A hidrodinâmica é uma teoria efetiva, válida para flutuações lentas e de grande comprimento de onda.
- Sendo uma teoria efetiva, a hidrodinâmica é construída como uma expansão perturbativa.
- Em ordem zero, temos um fluido ideal (não-viscoso).
- A viscosidade aparece em termos de ordens mais altas.
- Construção relativística: covariância e o tensor energia-momento.
- Esquema geral:

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu}(\phi) + T_1^{\mu\nu}(\partial\phi) + T_2^{\mu\nu}(\partial^2\phi, (\partial\phi)^2) + \dots$$

A expansão em gradientes

- A hidrodinâmica é uma teoria efetiva, válida para flutuações lentas e de grande comprimento de onda.
- Sendo uma teoria efetiva, a hidrodinâmica é construída como uma expansão perturbativa.
- Em ordem zero, temos um fluido ideal (não-viscoso).
- A viscosidade aparece em termos de ordens mais altas.
- Construção relativística: covariância e o tensor energia-momento.
- Esquema geral:

$$T^{\mu\nu} = T_0^{\mu\nu}(\phi) + T_1^{\mu\nu}(\partial\phi) + T_0^{\mu\nu}(\partial^2\phi, (\partial\phi)^2) + \dots$$

Os graus de liberdade hidrodinâmicos

- Os graus de liberdade fundamentais de um sistema no regime hidrodinâmico são:
 - A densidade de energia: ε
 - A temperatura local: T
 - A densidade de entropia: s
 - A pressão: p
 - O campo de velocidades: u^μ
 - A geometria do espaço-tempo: $g^{\mu\nu}$
- As funções termodinâmicas estão conectadas por meio das equações de equilíbrio local, como $\varepsilon + p = s T$ e $d\varepsilon = T ds$.
- Fluido perfeito:

$$T_0^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu}.$$
- Correções de 1ª ordem:

$$T_1^{\mu\nu} = -\zeta \Theta \Delta^{\mu\nu} - \eta \sigma^{\mu\nu} \quad (\zeta = 0 \text{ p/ fluido conforme}).$$

Os graus de liberdade hidrodinâmicos

- Os graus de liberdade fundamentais de um sistema no regime hidrodinâmico são:
 - A densidade de energia: ε
 - A temperatura local: T
 - A densidade de entropia: s
 - A pressão: p
 - O campo de velocidades: u^μ
 - A geometria do espaço-tempo: $g^{\mu\nu}$
- As funções termodinâmicas estão conectadas por meio das equações de equilíbrio local, como $\varepsilon + p = s T$ e $d\varepsilon = T ds$.
- Fluido perfeito:

$$T_0^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu}.$$

- Correções de 1ª ordem:

$$T_1^{\mu\nu} = -\zeta \Theta \Delta^{\mu\nu} - \eta \sigma^{\mu\nu} \quad (\zeta = 0 \text{ p/ fluido conforme}).$$

Os graus de liberdade hidrodinâmicos

- Os graus de liberdade fundamentais de um sistema no regime hidrodinâmico são:
 - A densidade de energia: ε
 - A temperatura local: T
 - A densidade de entropia: s
 - A pressão: p
 - O campo de velocidades: u^μ
 - A geometria do espaço-tempo: $g^{\mu\nu}$
- As funções termodinâmicas estão conectadas por meio das equações de equilíbrio local, como $\varepsilon + p = s T$ e $d\varepsilon = T ds$.
- Fluido perfeito:

$$T_0^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu}.$$

- Correções de 1ª ordem:

$$T_1^{\mu\nu} = -\zeta \Theta \Delta^{\mu\nu} - \eta \sigma^{\mu\nu} \quad (\zeta = 0 \text{ p/ fluido conforme}).$$

Os graus de liberdade hidrodinâmicos

- Os graus de liberdade fundamentais de um sistema no regime hidrodinâmico são:
 - A densidade de energia: ε
 - A temperatura local: T
 - A densidade de entropia: s
 - A pressão: p
 - O campo de velocidades: u^μ
 - A geometria do espaço-tempo: $g^{\mu\nu}$
- As funções termodinâmicas estão conectadas por meio das equações de equilíbrio local, como $\varepsilon + p = s T$ e $d\varepsilon = T ds$.
- Fluido perfeito:

$$T_0^{\mu\nu} = \varepsilon u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu}.$$

- Correções de 1ª ordem:

$$T_1^{\mu\nu} = -\zeta \Theta \Delta^{\mu\nu} - \eta \sigma^{\mu\nu} \quad (\zeta = 0 \text{ p/ fluido conforme}).$$

As equações da hidrodinâmica relativística

- Correções de 2ª ordem:

$$T_2^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^7 \xi_a \mathcal{S}_a^{2\text{nd}} \Delta^{\mu\nu} + \sum_{b=1}^N \lambda_b \left(\mathcal{T}_b^{2\text{nd}} \right)^{\mu\nu} \quad (\xi_a = 0 \text{ p/ fluido conforme}),$$

onde $N = 8(5)$ para um fluido geral (conforme).

- Correções de 3ª ordem:

$$T_3^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{20} \chi_a \mathcal{S}_a^{3\text{rd}} \Delta^{\mu\nu} + \sum_{b=1}^M \gamma_b \left(\mathcal{T}_b^{3\text{rd}} \right)^{\mu\nu} \quad (\chi_a = 0 \text{ p/ fluido conforme}),$$

onde $M = 39(19)$ para um fluido geral (conforme).

- Equações de movimento até terceira ordem:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu \left(T_0^{\mu\nu} + T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu} \right) = 0.$$

As equações da hidrodinâmica relativística

- Correções de 2ª ordem:

$$T_2^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^7 \xi_a \mathcal{S}_a^{2\text{nd}} \Delta^{\mu\nu} + \sum_{b=1}^N \lambda_b \left(\mathcal{T}_b^{2\text{nd}} \right)^{\mu\nu} \quad (\xi_a = 0 \text{ p/ fluido conforme}),$$

onde $N = 8(5)$ para um fluido geral (conforme).

- Correções de 3ª ordem:

$$T_3^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{20} \chi_a \mathcal{S}_a^{3\text{rd}} \Delta^{\mu\nu} + \sum_{b=1}^M \gamma_b \left(\mathcal{T}_b^{3\text{rd}} \right)^{\mu\nu} \quad (\chi_a = 0 \text{ p/ fluido conforme}),$$

onde $M = 39(19)$ para um fluido geral (conforme).

- Equações de movimento até terceira ordem:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu \left(T_0^{\mu\nu} + T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu} \right) = 0.$$

As equações da hidrodinâmica relativística

- Correções de 2ª ordem:

$$T_2^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^7 \xi_a \mathcal{S}_a^{2\text{nd}} \Delta^{\mu\nu} + \sum_{b=1}^N \lambda_b \left(\mathcal{T}_b^{2\text{nd}} \right)^{\mu\nu} \quad (\xi_a = 0 \text{ p/ fluido conforme}),$$

onde $N = 8(5)$ para um fluido geral (conforme).

- Correções de 3ª ordem:

$$T_3^{\mu\nu} = \sum_{a=1}^{20} \chi_a \mathcal{S}_a^{3\text{rd}} \Delta^{\mu\nu} + \sum_{b=1}^M \gamma_b \left(\mathcal{T}_b^{3\text{rd}} \right)^{\mu\nu} \quad (\chi_a = 0 \text{ p/ fluido conforme}),$$

onde $M = 39(19)$ para um fluido geral (conforme).

- Equações de movimento até terceira ordem:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \nabla_\mu \left(T_0^{\mu\nu} + T_1^{\mu\nu} + T_2^{\mu\nu} + T_3^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Relações de dispersão no frame de repouso

- Considerando perturbações $\delta u(x)$ e $\delta \ln s(x)$ de um fluido conforme num espaço-tempo plano, obtemos:

$$\omega_{\text{shear}}(k) = -i \frac{\eta}{sT} k^2 - i \left(\frac{\eta \lambda_4}{s^2 T^2} \right) k^4$$

para o modo de cisalhamento e

$$\omega_{\text{sound}}(k) = ck - \frac{i\beta_1}{2sT} k^2 - \left(\frac{\beta_1^2}{8cs^2T^2} - \frac{c\beta_2}{2sT} \right) k^3 - i \left(\frac{\beta_3}{2sT} - \frac{\beta_1\beta_2}{2s^2T^2} \right) k^4$$

para o modo de onda sonora.

- Coefficientes reduzidos:

$$\beta_1 = 2\eta \left(\frac{d-2}{d-1} \right), \quad \beta_2 = 2\lambda_4 \left(\frac{d-2}{d-1} \right), \quad \beta_3 = 2(\gamma_6 + \gamma_7) \left(\frac{d-2}{d-1} \right).$$

Relações de dispersão no frame de repouso

- Considerando perturbações $\delta u(x)$ e $\delta \ln s(x)$ de um fluido conforme num espaço-tempo plano, obtemos:

$$\omega_{\text{shear}}(k) = -i \frac{\eta}{sT} k^2 - i \left(\frac{\eta \lambda_4}{s^2 T^2} \right) k^4$$

para o modo de cisalhamento e

$$\omega_{\text{sound}}(k) = ck - \frac{i\beta_1}{2sT} k^2 - \left(\frac{\beta_1^2}{8cs^2T^2} - \frac{c\beta_2}{2sT} \right) k^3 - i \left(\frac{\beta_3}{2sT} - \frac{\beta_1\beta_2}{2s^2T^2} \right) k^4$$

para o modo de onda sonora.

- Coefficientes reduzidos:

$$\beta_1 = 2\eta \left(\frac{d-2}{d-1} \right), \quad \beta_2 = 2\lambda_4 \left(\frac{d-2}{d-1} \right), \quad \beta_3 = 2(\gamma_6 + \gamma_7) \left(\frac{d-2}{d-1} \right).$$

6. COEFICIENTES DE TRANSPORTE DE UM PLASMA CFT DUAL

Perturbações gravitacionais de uma brana negra

- Equações fundamentais dos setores vetorial e escalar:

$$\left[f \frac{d}{du} \left(f \frac{d}{du} \right) + \mathfrak{m}^2 - V_2^{(\pm)} \right] Z_2^{(\pm)} = 0.$$

- Potenciais efetivos:

$$V_2^{(-)}(u) = f (q^2 - 3u),$$

$$V_2^{(+)}(u) = \frac{f}{q^2 + 3u} \left[q^4 + \frac{9(2 + q^2 u^2 + u^3)}{q^2 + 3u} \right].$$

- Sendo:

$$u = \frac{r_h}{r}, \quad \mathfrak{m} = \frac{3\omega}{4\pi T}, \quad q = \frac{3k}{4\pi T}.$$

Perturbações gravitacionais de uma brana negra

- Equações fundamentais dos setores vetorial e escalar:

$$\left[f \frac{d}{du} \left(f \frac{d}{du} \right) + \omega^2 - V_2^{(\pm)} \right] Z_2^{(\pm)} = 0.$$

- Potenciais efetivos:

$$V_2^{(-)}(u) = f (q^2 - 3u),$$

$$V_2^{(+)}(u) = \frac{f}{q^2 + 3u} \left[q^4 + \frac{9(2 + q^2 u^2 + u^3)}{q^2 + 3u} \right].$$

- Sendo:

$$u = \frac{r_h}{r}, \quad \omega = \frac{3\omega}{4\pi T}, \quad q = \frac{3k}{4\pi T}.$$

Perturbações gravitacionais de uma brana negra

- Equações fundamentais dos setores vetorial e escalar:

$$\left[f \frac{d}{du} \left(f \frac{d}{du} \right) + \mathfrak{w}^2 - V_2^{(\pm)} \right] Z_2^{(\pm)} = 0.$$

- Potenciais efetivos:

$$V_2^{(-)}(u) = f (q^2 - 3u),$$

$$V_2^{(+)}(u) = \frac{f}{q^2 + 3u} \left[q^4 + \frac{9(2 + q^2 u^2 + u^3)}{q^2 + 3u} \right].$$

- Sendo:

$$u = \frac{r_h}{r}, \quad \mathfrak{w} = \frac{3\omega}{4\pi T}, \quad q = \frac{3k}{4\pi T}.$$

Solução analítica para o setor vetorial

- Expandindo em potências de ω e q :

$$Z_2^{(-)}(u) = \Phi_V(1 + \Pi_V u + \dots),$$

onde

$$\Pi_V(\omega, q) = \frac{d(\omega, q)}{i\omega [q^2 (\sqrt{3}\pi - 9\ln 3) - 54] + 3q^2 (6 + q^2)}$$

- As frequências QNM's correspondem aos pólos de $\Pi_V(\omega, q)$:

$$\omega = -\frac{i}{4\pi T} k^2 - i \frac{9 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{384\pi^3 T^3} k^4.$$

- Logo:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi T} \quad \text{e} \quad \frac{\eta\lambda_4}{s^2 T^2} = \frac{9 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{384\pi^3 T^3}.$$

Solução analítica para o setor vetorial

- Expandindo em potências de \mathfrak{w} e q :

$$Z_2^{(-)}(u) = \Phi_V(1 + \Pi_V u + \dots),$$

onde

$$\Pi_V(\mathfrak{w}, q) = \frac{d(\mathfrak{w}, q)}{i\mathfrak{w} [q^2 (\sqrt{3}\pi - 9\ln 3) - 54] + 3q^2 (6 + q^2)}$$

- As frequências QNM's correspondem aos pólos de $\Pi_V(\mathfrak{w}, q)$:

$$\omega = -\frac{i}{4\pi T} k^2 - i \frac{9 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{384\pi^3 T^3} k^4.$$

- Logo:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi T} \quad \text{e} \quad \frac{\eta\lambda_4}{s^2 T^2} = \frac{9 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{384\pi^3 T^3}.$$

Solução analítica para o setor vetorial

- Expandindo em potências de \mathfrak{w} e q :

$$Z_2^{(-)}(u) = \Phi_V(1 + \Pi_V u + \dots),$$

onde

$$\Pi_V(\mathfrak{w}, q) = \frac{d(\mathfrak{w}, q)}{i\mathfrak{w} [q^2 (\sqrt{3}\pi - 9\ln 3) - 54] + 3q^2 (6 + q^2)}$$

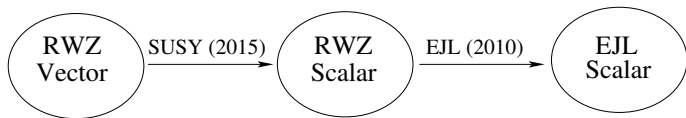
- As frequências QNM's correspondem aos pólos de $\Pi_V(\mathfrak{w}, q)$:

$$\omega = -\frac{i}{4\pi T} k^2 - i \frac{9 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{384\pi^3 T^3} k^4.$$

- Logo:

$$\frac{\eta}{s} = \frac{1}{4\pi T} \quad \text{e} \quad \frac{\eta\lambda_4}{s^2 T^2} = \frac{9 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{384\pi^3 T^3}.$$

Solução analítica para o setor escalar



- Relação de dispersão:

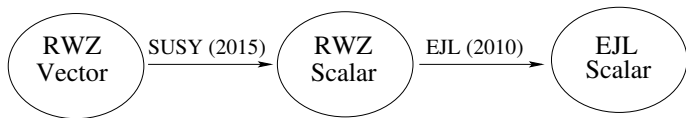
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}k - \frac{i}{8\pi T}k^2 + \frac{(15 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3)}{192\sqrt{2}\pi^2 T^2}k^3 + \frac{i[144 + 4\sqrt{3}\pi + 3\pi^2 - 6(6 + \sqrt{3}\pi)\ln 3 + 27\ln^2 3 - 12\psi^{(1)}(2/3)]}{6144\pi^3 T^3}k^4.$$

- Coeficientes de transporte:

$$\eta = \frac{2^{3/2}\pi}{3^3}N^{3/2}T^2, \quad \lambda_4 = \frac{18 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{162\sqrt{2}}N^{3/2}T, \quad \gamma_7 = \frac{1}{72\sqrt{2}\pi}N^{3/2},$$

$$\gamma_6 = \frac{12\psi^{(1)}\left(\frac{2}{3}\right) - 3\pi^2 + 2\sqrt{3}\pi(2 + 3\ln 3) - 9\ln 3(4 + 3\ln 3)}{5184\sqrt{2}\pi}N^{3/2} - \gamma_7.$$

Solução analítica para o setor escalar



- Relação de dispersão:

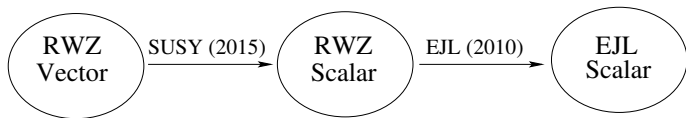
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}k - \frac{i}{8\pi T}k^2 + \frac{(15 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3)}{192\sqrt{2}\pi^2 T^2}k^3 + \frac{i[144 + 4\sqrt{3}\pi + 3\pi^2 - 6(6 + \sqrt{3}\pi)\ln 3 + 27\ln^2 3 - 12\psi^{(1)}(2/3)]}{6144\pi^3 T^3}k^4.$$

- Coeficientes de transporte:

$$\eta = \frac{2^{3/2}\pi}{3^3}N^{3/2}T^2, \quad \lambda_4 = \frac{18 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{162\sqrt{2}}N^{3/2}T, \quad \gamma_7 = \frac{1}{72\sqrt{2}\pi}N^{3/2},$$

$$\gamma_6 = \frac{12\psi^{(1)}\left(\frac{2}{3}\right) - 3\pi^2 + 2\sqrt{3}\pi(2 + 3\ln 3) - 9\ln 3(4 + 3\ln 3)}{5184\sqrt{2}\pi}N^{3/2} - \gamma_7.$$

Solução analítica para o setor escalar



- Relação de dispersão:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}}k - \frac{i}{8\pi T}k^2 + \frac{(15 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3)}{192\sqrt{2}\pi^2 T^2}k^3 + \frac{i[144 + 4\sqrt{3}\pi + 3\pi^2 - 6(6 + \sqrt{3}\pi)\ln 3 + 27\ln^2 3 - 12\psi^{(1)}(2/3)]}{6144\pi^3 T^3}k^4.$$

- Coeficientes de transporte:

$$\eta = \frac{2^{3/2}\pi}{3^3}N^{3/2}T^2, \quad \lambda_4 = \frac{18 + \sqrt{3}\pi - 9\ln 3}{162\sqrt{2}}N^{3/2}T, \quad \gamma_7 = \frac{1}{72\sqrt{2}\pi}N^{3/2},$$

$$\gamma_6 = \frac{12\psi^{(1)}\left(\frac{2}{3}\right) - 3\pi^2 + 2\sqrt{3}\pi(2 + 3\ln 3) - 9\ln 3(4 + 3\ln 3)}{5184\sqrt{2}\pi}N^{3/2} - \gamma_7.$$