EXTENSIÓN VERTICAL DEL TEOREMA DE NOETHER

ABRAHAM SANCHEZ, DANIEL GUTIERREZ, JAG

(ICN-UNAM)

- “Kepler Harmonies” and conformal symmetries [Zhang, Cariglia, Elbistan, Gibbons, Horvathy]
- J. Kepler, “Ioannis Keppleri Harmonices mundi libri V.” Linz, (Austria): Johann Planc, 1619, p. 189: “...proportio qua est inter binorum quorumcunque Planetarum tempora periodica, sit praecise sesquialtera proportionis mediarum distantiarum ...” (the proportion between the periodic times of any two planets is precisely the sesquialternate proportion [i.e., the ratio of 3:2] of their mean distances . . .).

INTRO

- Las simetrías de escala $x \to \lambda^{\alpha} x, t \to \lambda^{\beta} t$ son muy importantes en física:
- hydrodinámica, mecánica clásica, renormalización, termodinámica, transiciones de fase, fenómenos críticos, CFT (Landau)
- Puede usarse el teorema de Noether para este tipo de simetrías?
- Cuál es la cantidad conservada?

- Teorema de Noether Generalizado arXiv:1903.05070 (Zhang, Elbistain, Horvathy, Kosinsky)
- Solución formal (H-J)
- Teorema Inverso?
- Generador de la simetría? ($\delta q = \{q, G\}, \delta p = \{p, G\}$)
- Interpretación física

- Las simetrías de escala, NO son simetrías de la acción

$$S = \int L dt$$

  - simetrías de las ECUACIONES DE MOVIMIENTO! (Simetrías NO-NOETHERIANAS)

KEPLER

- Kepler : $x \to \lambda^2 x$, $t \to \lambda^3 t$
- $$L = \frac{m}{2}(\frac{d\mathbf{q}}{dt})^2 + G\frac{mM}{|\mathbf{q}|} \to \lambda^{-2} L_{Kepler}$$
- $$Q_{Kepler} = m\frac{d}{dt}\mathbf{q}^2 - 3tE - S(t) \qquad S = \int_0^t d\tau \ L_{Kepler}$$
- $S \to \Lambda S, \quad \Lambda = 1$

SIMETRÍAS DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

A cada simetría infinitemismal

$$\delta q^i = \bar{q}^i(\bar{t}) - q^i(t), \qquad \delta t = \bar{t} - t$$

le asociamos una simetría de la forma

$$\Delta q^i = \delta q^i - \dot{q}^i \delta t$$

- $\Delta q^i = \eta^i(q, \dot{q}, t)$ es una simetría de las ecuaciones de movimiento si

$$\ddot{q}^i - F^i(q^j, \dot{q}^j, t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{\bar{q}}^i - F^i(\bar{q}^j, \dot{\bar{q}}^j, t) = 0,$$

SIMETRÍAS DE LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

- Notación

$$\frac{\bar{d}}{dt} = F^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i} + \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \frac{\partial}{\partial t}$$

- Toda simetría de las ecuaciones de movimiento satisface esta relación ($\Delta q^i = \eta^i$)

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\eta^i - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\frac{\bar{d}}{dt}\eta^j - \frac{\partial F^i}{\partial q^j}\eta^j = 0$$

- En particular si $\Delta q^i = aq^i - b\dot{q}^i t$

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}(aq^i - b\dot{q}^i t) - \frac{\partial F^i}{\partial \dot{q}^j}\frac{\bar{d}}{dt}(aq^j - b\dot{q}^j t) - \frac{\partial F^i}{\partial q^j}(aq^j - b\dot{q}^j t) = 0$$

- $a = 1$,$b = 2$ implica F homogenea de grado -3

$$\frac{\partial F^i}{\partial q^j} q^j = -3F^i$$

- Conformal Mechanics

TEOREMA DE NOETHER GENERALIZADO (ZEHK)

- Consideremos un mapeo infinitesimal de escala anisotrópico genérico
$$q^i \to \lambda^a q^i, \qquad t \to \lambda^b t$$
la transformación infinitesimal
$$\Delta q^i = a q^i - b \dot{q}^i t,$$
cambia la función Lagrangiana en la forma
$$\Delta L = \Lambda(a,b) L(q, \dot{q}, t) + \frac{df}{dt}$$
- $$C_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}(a q^j - b \dot{q}^j t) - f - \Lambda S(t)$$
donde $S(t)$ es la acción Lagrangiana
$$S = \int L dt$$

Es cierto que C_s es una constate de movimiento

$$\frac{\bar{d} C_s}{dt} = 0$$

usando la versión Lagrangiana de la ec. de Hamilton-Jacobi [Landau]

$$\frac{\bar{d} S}{dt} = L$$

que implica

$$\frac{\bar{d}}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}(a q^j - b \dot{q}^j t) - f\right) = \frac{\bar{d} G}{dt} = \Lambda L$$

$$\longrightarrow G - \Lambda S \sim C$$

- Usando el teorema inverso de Noether: danda una constante de es posible construir una simetría de Noether dada por

$$\delta q^i = W^{ij} \frac{\partial C}{\partial \dot{q}^j}$$

- Encontramos un resultado interesante: Aplicando este teorema a la cantidad conservada asociada a la simetría de escala obtenemos

$$\tilde{\Delta} q^i = W^{ij} \frac{\partial C_s}{\partial \dot{q}^i}$$

- Es de Noether por construcción.
- NO es la simetría de escala!
- La simetría de escala es

$$\Delta_s q^i = W^{ij} \frac{\partial G}{\partial \dot{q}^j}$$

prueba: calculamos

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}^j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}(aq^i - b\dot{q}^i t) - f)$$

Para una simetría de escala

$$f = -L\delta t$$

Por tanto

$$\frac{\partial G}{\partial \dot{q}^j} = W_{ij}(aq^i - b\dot{q}^i t)$$

- La nueva simetría $\tilde{\Delta} q^i$ produce otra constante de movimiento usando el teorema de Noether.
- La constante de movimiento C_s puede escribirse en la forma

$$C_s = q^i(0)\dot{q}^i(0)$$

conjunto completo de datos iniciales!

EXTENSIÓN VERTICAL

- Es un formalismo variacional que UNIFICA las simetrías de las ecuaciones de movimiento con simetrías variacionales (L).
- Extender el espacio

$$(q^i, \dot{q}^i) \longrightarrow (q^i, \dot{q}^i, \eta^i, \dot{\eta}^i)$$

- η campos de Jacobi
- Nuevos grados de libertad η^i
- Espacio tangente de dim 2d a espacio tangente de dim 4d

- Proyección a espacio tangente de 2d Lagrangiano cuando $\eta^i \to \delta q^i$

Definición:

$$\gamma(q,\eta,\dot{q},\dot{\eta}) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\dot{\eta}^i + \frac{\partial L}{\partial q^i}\eta^i.$$

Otra forma equivalente para γ es

$$\gamma = -\eta^i(\mathrm{EM}_i^q(L)) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\eta^i\right),$$

donde $\mathrm{EM}_i^q(L)$ son las ecs. de Euler-Lagrange asociadas al Lagrangiano L

$$\mathrm{EM}_i^q(L) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i}.$$

La variación infinitesimal de γ es

$$\Delta\gamma = -\Delta q^i(\mathrm{EM}^q_i(\gamma)) - \Delta\eta^i(\mathrm{EM}^\eta_i(\gamma)) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\dot{q}^i}\Delta q^i + \frac{\partial\gamma}{\partial\dot{\eta}^i}\Delta\eta^i\right)$$

donde

$$\mathrm{EM}^\eta_i(\gamma) = \frac{d}{dt}\frac{\partial\gamma}{\partial\dot{\eta}^i} - \frac{\partial\gamma}{\partial\eta^i}$$

son las ecs. de movimiento asociadas al Lagrangiano L, y $\mathrm{EM}^q_i(\gamma)$ son las ecs. de Jacobi

$$W_{ij}(q,\dot{q},t)\ddot{\eta}^j + N_{ij}(q,\dot{q},t)\dot{\eta}^j + M_{ij}(q,\dot{q},t)\eta^j = 0,$$

- DEFINICIÓN DE SIMETRÍA EN EXTENSIÓN VERTICAL
- OBSERVACIÓN: escalamiento en γ = escalamiento en

Lagrangiano L CONDICIÓN SOBRE $\Delta_s q^i$ para ser SIMETRÍA de la función Lagrangiana

$$\Delta_s L = \Lambda(a,b)L - \frac{d}{dt}(L\delta t).$$

Ansatz para el espacio vertical:

$$\Delta_s q^i = aq^i - b\dot{q}^i t, \quad \Delta_s \eta^i = a\eta^i - b\dot{\eta}^i t.$$

CONDICIÓN SIMETRÍA de γ:

$$\Delta_s \gamma = \Lambda(a,b)\gamma - \frac{d}{dt}(\gamma\delta t),$$

con $\Lambda(a,b)$.

1-IDENTIDAD

$$\Delta_s\gamma = -\Delta_s q^i(\mathrm{EM}_i^q(\gamma)) - \Delta_s\eta^i(\mathrm{EM}_i^\eta(\gamma)) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\dot{q}^i}\Delta_s q^i + \frac{\partial\gamma}{\partial\dot{\eta}^i}\Delta_s\eta^i\right).$$

2- SIMETRÍA

$$\Delta_s\gamma = \Lambda(a,b)\left(-\eta^i(\mathrm{EM}_i^q(L)) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\eta^i\right)\right) - \frac{d}{dt}(\gamma\delta t).$$

1=2⟶

$$-\Delta_s q^i(\mathrm{EM}_i^q(\gamma)) - \Delta_s\eta^i(\mathrm{EM}_i^\eta(\gamma)) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\dot{q}^i}\Delta_s q^i + \frac{\partial\gamma}{\partial\dot{\eta}^i}\Delta_s\eta^i\right) = \Lambda(a,b)\left(-\eta^i(\mathrm{EM}_i^q(L) + \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\eta^i)\right) - \frac{d}{dt}(\gamma\delta t).$$

- CANTIDAD CONSERVADA:

$$C_s^E = \frac{\partial\gamma}{\partial\dot{q}^i}\Delta_s q^i + \frac{\partial\gamma}{\partial\dot{\eta}^i}\Delta_s\eta^i - \Lambda\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\eta^i + \gamma\delta t.$$

- EN TÉRMINOS DE L:

$$C_s^E = \left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^j}\dot{\eta}^j + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i\partial q^j}\eta^j\right)\Delta_s q^i - \Lambda\frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\eta^i + \frac{\partial L}{\partial\dot{q}^i}\Delta_s\eta^i + \gamma\delta t,$$

- PRUEBA:

$$\frac{d}{dt}C^E = \Delta_s q^i(\mathrm{EM}_i^q(\gamma)) + (\Delta_s\eta^i - \Lambda\eta^i)(\mathrm{EM}_i^q(L)).$$

(Nota: $\mathrm{EM}_i^\eta(\gamma)$ es lo mismo que $\mathrm{EM}_i^q(L)$),

VERTICAL $\longrightarrow$ TANGENTE

$$C_s^E\Big|_{\eta^i} = C^q(q, \dot{q}, t).$$

$$\frac{d}{dt}C_s^E = \frac{\partial C_s^E}{\partial \dot{q}^i}\mathrm{EM}_i + \frac{\partial C_s^E}{\partial \dot{\eta}^i}\mathrm{EMJ}_i\,.$$

$$\frac{d}{dt}(C_s^E)\Big|_{\eta^i} = \frac{d}{dt}\left(C_s^E\Big|_{\eta^i}\right) = \frac{d}{dt}C^q(q, \dot{q}, t),$$

- OBSERVACIÓN:

$$\frac{d}{dt}C^q = (\Delta_s\eta^i - \Lambda\eta^i)\Big|_{\eta^i(q,\dot{q},t)}\mathrm{EM}_i^q\,.$$

TEOREMA INVESRSO DE NOETHER

$$\frac{\partial C^{(q,\eta)}}{\partial \dot{\eta}^i} = W_{ij}\Delta_s q^i, \qquad \frac{\partial C^{(q,\eta)}}{\partial \dot{q}^i} = W_{ij}(\Delta_s \eta^i - \Lambda \eta^j).$$

- NUEVA SIMETRÍA !!

EJEMPLO: $L = T - V$

- $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - V(q)$.
- $V(\mu q) = \mu^k V(q)$,

$$\gamma = \dot{q}^i \dot{\eta}^i - \frac{\partial V}{\partial q^i}\eta^i,$$

CONSERVADA:

$$C_s^E = \dot{\eta}^i \Delta q^i - \Lambda \dot{q}^i \eta^i + \dot{q}^i \Delta \eta^i + \dot{q}^i \dot{\eta}^i \delta t - \frac{\partial V}{\partial q^i}\eta^i \delta t,$$

SIMETRÍA:

$$\Delta_s q^i = a q^i - b \dot{q}^i \delta t, \qquad \Delta_s \eta^i = a \eta^i - b \dot{\eta}^i \delta t,$$

$$C_s^E = a \dot{\eta}^i q^i - a \dot{q}^i \eta^i - b \dot{\eta}^i \dot{q}^i t + b \dot{q}^i \eta^i - bt \frac{\partial V}{\partial q^i}\eta^i.$$

En términos de k, a and $b = a(1 - k/2)$ (ZEHK)

$$\Lambda = 2a - b = a(1 + k/2)$$

- case $a = 2, b = 3$, 3^a ley de Kepler

CONCLUSIÓN

- constante de movimiento basada en la simetría de escala extendida
- información dinámica en el espacio de configuración original mediante una proyección usando CUALQUIER SOLUCIÓN PARTICULAR de la ec. de Jacobi.
- Este procedimiento asocia DOS simetrías (una de ellas es la simetría de escala) con UNA cantidad conservada
- Nueva simetría de Noether